

N° d'ordre :  
Année : 2009

**UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI  
FACULTE DES SCIENCES  
TETOUAN**

**THÈSE**

Présentée

Pour l'obtention du

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Par

**Ossama MERROUN**

Discipline : Physique  
Spécialité : Energétique - Physique des réacteurs

**DEVELOPPEMENT D'UN CODE DE CALCUL  
THERMOHYDRAULIQUE POUR LES REACTEURS  
REFROIDIS A EAU SOUS CONVECTION NATURELLE**

**APPLICATION A L'ANALYSE THERMOHYDRAULIQUE DU  
REACTEUR TRIGA MARK II DU CENM**

Soutenue le 26 septembre 2009 devant le jury composé de :

Mr A. Kamili	Professeur	Faculté des Sciences - Tétouan	Président
Mr A. Lyoussi	Professeur	CEA - Cadarache - France	Rapporteur
Mr E. Chakir	Professeur	Faculté des Sciences - Kénitra	Rapporteur
Mr L. Lahlaouti	Professeur	Faculté des Sciences - Tétouan	Rapporteur
M <sup>me</sup> C. Reynard-Carette	Professeur	Université de Provence - France	Examinateur
Mr Denis Bertin	Professeur	Université de Provence - France	Examinateur
Mr A.AL MERS	Professeur	ENSAM - Meknès	Co-directeur
Mr T. EL BARDOUNI	Professeur	Faculté des Sciences - Tétouan	Directeur

*Dédicace*

*À mes parents  
À ma sœur  
et mon frère*

---

# Préface

Le travail de recherche effectué par Monsieur Ossama Merroun constitue une contribution originale aux études thermohydrauliques des réacteurs refroidis à eau sous convection naturelle. Il s'est intéressé particulièrement au développement d'un code de calcul thermohydraulique moyennant la méthode des « sous-canaux » et à l'élaboration d'une technique de vérification du code sur un benchmark expérimental du réacteur de type Triga du Brésil. Mr Ossama a appliqué son code pour une analyse thermohydraulique très détaillée du réacteur TRIGA MARK II de CEN de la Maâmora. Les résultats ainsi obtenus sont très encourageants et concordent bien avec les recommandations de General Atomics constructeur des réacteurs Triga.

L'originalité et la richesse de ce travail ont permis à Mr Ossama Merroun de contribuer à plusieurs communications nationales et internationales et de publier trois articles dans des revues internationales spécialisées :

- \* O. Merroun, A. Almers, M.A. Veloso, T. El Bardouni, E. Chakir. 2009. Experimental validation of the thermal-hydraulic code SACATRI. Nuclear Engineering and Design. doi : 10.1016/j.nucengdes.2009.08.005.
- \* O. Merroun, A. Almers, T. El Bardouni, B. El Bakkari, E. Chakir. 2009. Analytical benchmarks for verification of thermal-hydraulic codes based on sub-channel approach. Nuclear Engineering and Design. 239 (4), pp 735-748.
- \* O. Merroun, A. Almers, T. El Bardouni, 2008. Manufactured solution for verification of the 3D Thermalhydraulic SACATRI code. Proc. CHT-08 on Advances in Computational Heat Transfer, ISBN 978-1-56700-252-2, Begell House, New York.
- \* O. Merroun, A. Al Mers, T. El Bardouni. 2007. Thermalhydraulic modeling and analysis of the hot channel of the Moroccan TRIGA MARK II research reactor. Proc. First International Conference on Physics and Technology of Reactors and Applications, Marrakech, Morocco, p. 39.
- \* O. Merroun, A. Al Mers, T. EL Bardouni. 2008. Verification and validation procedures in nuclear engineering : application to thermal-hydraulic analysis of triangular lattices of light water research reactor in natural circulation regime. JNPR4, May, 2008, Casablanca, Morocco.

Il a, également, contribué à la co-rédaction de plusieurs autres papiers scientifiques dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires :

- ★ B. El Bakkari, T. El Bardouni, O. Merroun, Ch. El Younoussi, Y. Boulaich, E. Chakir. 2009. Development of an MCNP-tally based burnup code and validation through PWR benchmark exercises. *Annals of Nuclear Energy* 36(5), pp 626-633.
- ★ B. El Bakkari, T. El Bardouni, O. Merroun, Ch. El Younoussi, Y. Boulaich, E. Chakir. 2009. Validation of a new continuous Monte Carlo burnup code using a Mox fuel assembly. *Nuclear Engineering and Design*. 239 (10), pp 1828-1838.
- ★ B. El Bakkari, T. El Bardouni, O. Merroun, Ch. El Younoussi, Y. Boulaich, E. Chakir. 2009. The development of an MCNP tally-based burnup code. *International Journal of Nuclear Energy Science and Technology*. 4(3), pp 179 - 195.

Mr Ossama Merroun a fait preuve de ses solides connaissances et compétence dans le domaine de la thermique, thermohydraulique et physique des réacteurs ainsi que les techniques numériques. Ce qui lui a permis de réaliser un travail constituant un apport consistant et important dans son domaine. La clarté et la présentation structurée du manuscrit ainsi que sa richesse en référence bibliographiques ont en fait un mémoire de qualité.

La thèse, ainsi présentée par Mr Ossama Merroun, pour obtenir le titre de Doctorat en Sciences, mérite d'être soutenue.

Tarek El Bardouni

# Remerciements

En fin, bien qu'elle apparaisse paradoxalement au début, j'entame ici l'ultime partie de ma thèse : les remerciements. L'exercice est par définition fabuleux puisqu'il s'agit de rendre hommage aux personnes que l'on estime. Au travers de ces quelques lignes il s'agit de signaler qu'une thèse n'est certainement pas un travail qui se mène seul et de se rappeler les bons moments forcément nombreux sur 4 ans. Si par les mots je ne la traduisais correctement, je fais appel à votre indulgence et je vous assure que mes remerciements viennent du fond du cœur, où les sentiments s'expriment différemment. D'autre part, la rédaction des remerciements, en marquant la fin de ma thèse annonce un grand début pour moi. Loin de considérer être parvenu à l'aboutissement de quelque chose, j'éprouve plutôt un vertige face à ma vie nouvelle qui vient de commencer.

Je commencerai par rendre hommage à mon directeur de thèse *Tarek El Bardouni* qui m'a donné envie de faire cette thèse. Sa présence sans faille à mes côtés, son écoute et ses réponses riches de sens furent une continue source de motivation. C'est un plaisir de bénéficier de sa rigueur scientifique, de son efficacité et de ses grandes qualités humaines, dont je tâcherai de m'inspirer par la suite. Cher *Tarek El Bardouni*, mille fois merci pour tout ce temps et cette énergie que vous avez pu me consacrer.

Je tiens aussi à remercier mon co-encadrant *Ahmed Al Mers* d'accepter de faire partie de ce travail de thèse. Il a été vraiment à la fois professeur et ami, et ces travaux n'auraient pu être réalisés sans son aide précieuse et généreuse. Son rigueur scientifique n'aura eu d'égal que son enthousiasme contagieux. Je le remercie infiniment pour son encouragement sans cesse dans les moments difficiles et pour toutes les nuits blanches qu'il a passées avec moi au laboratoire. Je n'oublierai jamais les merveilleux moments que nous avons vécus ensemble à Meknès et à Marrakech ; tu te rappelles de la salle d'Arbalou au sud du Maroc où nous avons joué le billard, vraiment je t'ai eu, mais tu ne veux pas le reconnaître . . . !

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au professeur *Hamid Boukhal* pour tout le soutien moral qu'il m'a apporté. Grâce à son intuition scientifique, il était le premier à me pousser et à m'encourager à travailler sur la thermohydraulique. Son esprit d'humour et les fréquentes discussions que nous avons eu m'ont permis d'oublier de temps en temps les difficultés rencontrées et de passer d'agréables moments.

Je veux continuer en remerciant spécialement *El Mahjoub Chakir*, professeur à la faculté des sciences de Kénitra, que j'ai d'abord connu dès ma licence, m'a honoré ensuite de faire parti du jury de mon DESA et qui est ensuite devenu un ami. Grâce à son expérience, il m'a conseillé, soutenu et encouragé face aux différents défis scientifiques auxquels j'ai été confronté. Son aide appréciable lors de la rédaction du présent mémoire a contribué à sa bonne clarté. Enfin, je le remercie d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse.

Je n'aurais pu mener de front ma thèse sans l'aide précieuse, et au bon moment, du

---

professeur *M. Antonio Veloso* du centre de développement de la technologie nucléaire de Belo Horizonte du Brésil. Je le remercie infiniment de l'appui scientifique et du temps qu'il m'a consacré ainsi que sa contribution efficace dans la validation du code thermohydraulique SACATRI.

Je remercie le CNRST qui m'a attribué une bourse d'excellence pendant trois ans qui m'a aidée considérablement à mener au bout les travaux entrepris par cette thèse.

Je remercie également tous les collaborateurs qui m'ont permis incontestablement d'évoluer et qui n'ont cessé de m'aider et de trouver des solutions aux différents problèmes que j'ai rencontrés, en particulier *Tahar EL Khoukhi* et *Mohamed Tabet* ingénieurs au CNESTEN.

Je souhaiterais remercier l'ensemble des membres de mon jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté de poser un regard critique sur mes travaux de recherche :

Monsieur *Abderrahmane Kamili*, professeur à la faculté des sciences de Tétouan, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Monsieur *A. El Youssi* chercheur au CEA d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Je le remercie également pour le grand intérêt qu'il a porté à mon travail ainsi que son soutien et son aide appréciable.

Monsieur *L. Lahlaouti* professeur à la faculté des sciences de Tétouan pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse.

Madame *Cristelle Reynard-Carette* pour son aide précieuse lors de la rédaction de ce mémoire et aussi pour avoir participé à la soutenance.

Monsieur *Denis Bertin*, professeur à l'université de Provence pour avoir participé à la soutenance et pour y avoir fait des remarques expertes et pertinentes.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mes collègues du labo qui ont contribué activement et positivement à mes travaux et qui ont fait que ces années de travail furent plus agréables. Je ne les citerai pas tous, chacun se reconnaîtra. Je souhaite toutefois exprimer ma gratitude à *Bilal El Bakkari*, *Yassine Boulaich* et *Chafik El Younoussi* qui m'ont accompagné avec bienveillance. Je n'oublie pas la nouvelle thésarde *Mariam Zoubair* que je tiens à lui souhaiter une très bonne carrière doctorale.

Je terminerai en remerciant mes amis de l'association *Abdelmalek Esaadi pour la Recherche Scientifique*. Ils m'ont régulièrement permis, grâce aux activités culturelles sportives et touristiques, d'oublier mes préoccupations scientifiques et d'évacuer la tension qu'elles suscitent.

Je remercie aussi toute ma famille et *Monique* pour leur présence et leur soutien. Je n'oublie pas tous mes amis qui me supportent depuis des années. Enfin pour conclure : bonne chance aux futurs docteurs à venir. Bonne chance aussi à celles et ceux, dont je fais désormais partie, maintenant diplômés, qui espèrent un jour obtenir un poste. Et oui qui l'eut cru, je suis docteur. Comme disais l'autre : la thèse tu l'as voulu, tu l'as eu, tu l'as soutenue ...

---

---

# Résumé

La convection naturelle est le mécanisme principal de refroidissement des réacteurs nucléaires de type TRIGA. Elle s'établit par la circulation naturelle de l'eau réfrigérante entre les éléments combustibles du cœur du réacteur. Le royaume du Maroc est l'un des pays qui sont dotés de cette filière de réacteurs. Il s'agit du réacteur TRIGA MARK II de puissance 2MW. Le défi majeur d'une étude thermohydraulique de ce réacteur consiste à savoir si le refroidissement par convection naturelle du réfrigérant est suffisant pour permettre l'évacuation de la chaleur résiduelle du cœur en toute sécurité. En d'autre terme, la connaissance précise des conditions dans lesquelles peut apparaître la crise d'ébullition est nécessaire. Ceci implique la détermination du flux de chaleur critique et du point de Burn-out. Pour déterminer ces paramètres de sûreté, plusieurs codes thermohydrauliques ont été développés. Bien qu'ils soient très puissants, l'application directe de ces codes à la simulation thermohydraulique du réacteur TRIGA MARK II, nécessite plusieurs adaptations et modifications qui restent très difficiles à réaliser dans la pratique. Dans ce contexte, le présent travail de thèse est dédié au développement d'un code thermohydraulique tridimensionnel permettant la simulation de l'écoulement du fluide réfrigérant, en circulation naturelle entre les éléments combustibles du réacteur TRIGA MARK II. Ainsi, le code « SACATRI », dont les fondements sont décrits dans ce travail, utilise les principes de l'analyse « sous-canaux ». Des modèles et des corrélations empiriques ont été utilisés pour décrire les différents phénomènes liés à l'écoulement du fluide en convection naturelle et qui sont difficiles à modéliser. Afin que le code SACATRI puisse reproduire avec précision le phénomène physique, différentes activités de vérification et de validation ont été menées sur le code. Le manque de benchmarks, avec une solution exacte spécifique à ce type de problème, nous a poussés à développer une démarche originale dans ce domaine. Pour montrer la capacité du code à reproduire les mesures expérimentales, une étude de comparaison a été menée entre les résultats de simulation du code SACATRI et les résultats de l'expérience effectuée sur le réacteur TRIGA IPR-R1 installé au CDNT/CNEN au Brésil. La comparaison indique que le code SACATRI reproduit ces mesures avec une très bonne précision. L'application du code SACATRI à l'analyse thermohydraulique du réacteur TRIGA MARK II montre que, en fonctionnement normal, le DNB minimal est de l'ordre de 2.4 avec un flux de chaleur local trois fois plus faible que le flux de chaleur critique pouvant entraîner une crise hydrodynamique au niveau de la gaine du combustible. Même à une tempéra-

ture d'entrée de l'ordre de 45 °C, la circulation naturelle de l'eau réfrigérante contribue efficacement à l'évacuation de la chaleur produite dans le cœur.

**Mots-clés :** thermohydraulique, analyse « sous-canaux », vérification et validation, réacteurs de recherche, TRIGA.

# Abstract

Thermal-hydraulic design and analysis is considered as an important aspect in safety studies of nuclear reactors. The role of such thermal-hydraulic analysis is to accurately predict the adequate working conditions, in steady state and transient conditions as well as in accidental situations, assuring the safe operation of nuclear reactors. For a detailed thermal-hydraulic analysis of nuclear reactors, a basic understanding of heat and mass transfer phenomena occurring between fuel assemblies is required. In this context, the topic of this dissertation consists on developing a three dimensional thermalhydraulic model capable to predict the thermal and the hydraulic behavior of the coolant in the core of the Moroccan TRIGA MARK II research reactor. For this purpose, SACATRI computer code, which fundamentals are described in this work, has been developed to simulate, under steady state single phase flow conditions, the thermalhydraulic phenomena occurring inside the core of water-refrigerated research reactor under a natural convection regime. By using the subchannel approach, the thermal-hydraulic model of SACATRI code is based on four partial differential equations that describe the conservation of mass, axial and transversal momentum, and energy. Empirical correlations, related to the coolant natural circulation, have been used for modeling the flow phenomena that are crucial to be described by theoretical relations. To achieve the full task of any numerical code, verification and validation are highly recommended activities for assessing the accuracy of computational simulations. In this work we have proposed a new procedure which can be used during code and solution verification activities of thermal-hydraulic tools based on sub-channel approach. The technique of verification proposed is based mainly on the combination of the method of manufactured solution and the order of accuracy test. The verification of SACATRI code allowed the quantification and the control of the most relevant numerical errors and the elaboration of exact analytical benchmarks that can be used to assess the mathematical correctness of the numerical solution. On the other hand, we have quantified the mathematical model accuracy of the code. The methodology adopted is based on the comparison between responses from SACATRI computational model and experimentally measured responses performed on the Brazilian IPR-R1 TRIGA research reactor installed and operated at the CDTN/CNEN. The results obtained have shown that, the SACATRI model for the IPR-R1 TRIGA reproduces the actual reactor thermalhydraulic behavior in good agreement with the available experimental data. The thermalhydraulic analysis of the

Moroccan TRIGA MARK II research reactor shows that, under normal working conditions, the minimal departure from nucleate boiling is about 2.4. This value is equivalent to a local heat flux that is three times less than the critical heat flux that could lead to a hydrodynamic crisis in the level of the fuel gap. Moreover, thermalhydraulic simulations prove that, for the maximum inlet coolant temperature ( $45^{\circ}\text{C}$ ), the natural circulation of the coolant contributes efficiently in removing the heat generated in the reactor core.

**Keywords :** Thermalhydraulic, research reactor, TRIGA, CFD, sub-channel approach, verification & validation, order of accuracy, manufactured solution.

# Table des matières

<b>Préface</b>	i
<b>Remerciements</b>	iii
<b>Résumé</b>	v
<b>Abstract</b>	vii
<b>Table des matières</b>	ix
<b>Table des figures</b>	xiii
<b>Liste des tableaux</b>	xviii
<b>Liste des abréviations</b>	xxi
<b>Liste des notations</b>	xxiii
<b>Introduction générale</b>	1
<b>1 La thermohydraulique et paramètres de sûreté des réacteurs</b>	7
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Les équations différentielles de conservation . . . . .	9
1.2.1 Conservation de la masse . . . . .	9
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	10
1.2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	14
1.3 La convection naturelle . . . . .	16
1.3.1 Principes de fonctionnement d'une boucle de circulation naturelle .	17
1.3.2 Adaptation des équations de bilan aux conditions de la circulation naturelle . . . . .	19
1.4 Génération de chaleur dans les réacteurs . . . . .	21
1.5 Profils de puissance et du flux neutronique dans les réacteurs nucléaires . .	23
1.6 Profils de température . . . . .	26
1.6.1 Profil axial de la température . . . . .	26
1.6.2 Distribution radiale de la température dans le combustible . . . . .	27
1.7 Transfert de chaleur et paramètres de sûreté . . . . .	28
1.7.1 Ecoulement simple phase liquide . . . . .	28

1.7.2	Evaluation du coefficient de transfert de chaleur convectif . . . . .	29
1.7.3	Ecoulement diphasique (en ébullition) . . . . .	37
1.8	Conclusion . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Conception thermohydraulique et limites de sûreté du réacteur TRIGA du CENM</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	Conception mécanique du CENM-TRIGA MARK II . . . . .	42
2.2.1	Description générale . . . . .	42
2.2.2	Plaque supérieure et plaque inférieure . . . . .	43
2.2.3	Plaque de sécurité . . . . .	44
2.2.4	Matériaux du réacteur . . . . .	45
2.2.5	Barre de contrôle . . . . .	45
2.2.6	Eléments factices en graphite . . . . .	46
2.2.7	Assemblage réflecteur . . . . .	47
2.2.8	Source de neutrons . . . . .	47
2.3	Refroidissement du réacteur . . . . .	48
2.4	Marges de sûreté du réacteur TRIGA . . . . .	50
2.5	Codes de calcul thermohydraulique . . . . .	52
2.5.1	Les Codes Système (System Codes) . . . . .	53
2.5.2	Codes basés sur l'approche sous-canaux . . . . .	55
2.5.3	Codes basés sur la formulation milieu poreux . . . . .	58
2.5.4	Les codes CFD . . . . .	59
2.6	Couplage neutronique-thermohydraulique . . . . .	59
2.7	Conclusion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Développement du modèle thermohydraulique</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Approche « sous-canaux » . . . . .	66
3.2.1	Paramètres géométriques et thermohydrauliques d'un sous-canal . . . . .	67
3.2.2	Discrétisation des sous-canaux en volumes de contrôles . . . . .	68
3.2.3	Propriétés de l'écoulement dans un sous-canal . . . . .	68
3.3	Développement du modèle thermohydraulique (1-D) . . . . .	71
3.3.1	Description du modèle simplifié . . . . .	71
3.3.2	Equation de conservation de masse . . . . .	72
3.3.3	Equation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	73
3.3.4	Equation de conservation d'énergie . . . . .	74
3.4	Pertes de charges dans un sous-canal (pressure drop) . . . . .	75
3.4.1	Pertes de charges linéaires . . . . .	75
3.4.2	Pertes de charges singulières . . . . .	77
3.5	Développement du modèle thermohydraulique tridimensionnel . . . . .	79
3.5.1	Equation de conservation de masse . . . . .	80
3.5.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	81
3.5.3	Equation de conservation d'énergie . . . . .	84
3.6	Mélange turbulent . . . . .	85

---

3.7	Calcul des résistances hydrauliques latérales . . . . .	86
3.8	Conclusion . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Discrétisation spatiale en différences finies des équations thermohydrauliques . . . . .	90
4.2.1	Equation de continuité . . . . .	92
4.2.2	Equation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction axiale . . . . .	92
4.2.3	Equation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction transversale . . . . .	94
4.2.4	Equation de conservation d'énergie . . . . .	95
4.3	Linéarisation . . . . .	96
4.4	Résolution numérique des systèmes algébriques . . . . .	98
4.5	Traitement du couplage Pression-Vitesse : Algorithme SIMPLE . . . . .	98
4.6	Conditions aux limites . . . . .	104
4.7	Procédure de résolution numérique . . . . .	106
4.8	Critère de convergence . . . . .	109
4.9	Développement d'un programme de résolution . . . . .	109
4.9.1	Caractéristiques techniques du code SACATRI . . . . .	110
4.9.2	Système d'indexation des sous-canaux dans le code SACATRI . . . . .	110
4.10	Conclusion . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Vérification et Validation du code SACATRI</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction . . . . .	115
5.2	Activités de vérifications . . . . .	117
5.3	Procédures de vérification . . . . .	118
5.3.1	La méthode de solutions fabriquées (MMS) . . . . .	119
5.3.2	Evaluation de l'ordre de précision observé (OOA) . . . . .	120
5.3.3	Procédure de vérification de la solution numérique . . . . .	124
5.3.4	Sources d'erreurs numériques . . . . .	124
5.3.5	Erreur de discrétisation . . . . .	125
5.4	Application à la vérification du code SACATRI . . . . .	126
5.4.1	Premier étape de vérification : Cas d'un sous-canal isolé . . . . .	127
5.4.2	Deuxième étape de vérification . . . . .	131
5.5	Sensibilité du calcul de l'ordre de précision observé . . . . .	144
5.6	Vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux . . . . .	146
5.7	Validation du code SACATRI . . . . .	154
5.7.1	Description du réacteur IPR-R1 . . . . .	154
5.7.2	Discrétisation en sous-canaux . . . . .	157
5.7.3	Distribution de la puissance . . . . .	157
5.7.4	Description de l'expérience et validation . . . . .	158
5.8	Comparaison code-code . . . . .	161
5.9	Conclusion . . . . .	172

---

<b>6 Simulation thermohydraulique du cœur du réacteur TRIGA MARK II du CENM</b>	<b>173</b>
6.1 Introduction . . . . .	173
6.2 Carte de puissance du cœur du réacteur TRIGA MARK II-CENM . . . . .	173
6.2.1 Le code MCNP . . . . .	174
6.2.2 Modélisation du réacteur TRIGA par le code MCNP . . . . .	174
6.2.3 Distribution de la puissance dans le cœur du réacteur . . . . .	177
6.3 Simulation thermohydraulique du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	184
6.3.1 Discrétisation du cœur en sous-canaux . . . . .	184
6.3.2 Distribution de la température et du débit de masse . . . . .	185
6.3.3 Effet de la température d'entrée du réfrigérant . . . . .	192
6.3.4 Effet de la puissance du réacteur . . . . .	195
6.3.5 Flux de chaleur critique et point de Burn-out . . . . .	196
6.4 Conclusion . . . . .	205
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>206</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>212</b>
<b>A Annexe A</b>	<b>227</b>

# Table des figures

1.1	La composante du flux de masse dans la direction $x$ . . . . .	10
1.2	Schéma du bilan de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle de référence . . . . .	11
1.3	Composante suivant $x$ de la contrainte de cisaillement . . . . .	12
1.4	Algorithme de résolution des équations de conservation (adapté d'après Toderas, 1990) . . . . .	16
1.5	Exemple de circulation naturelle dans un local d'habitation (Padet, 1997) .	17
1.6	Schéma d'une boucle fermée rectangulaire de circulation naturelle . . . . .	18
1.7	Schéma d'une boucle de circulation naturelle du fluide réfrigérant dans le cœur d'un réacteur de puissance (IAEA, 2005) . . . . .	19
1.8	Les différentes formes de libération d'énergie dans un réacteur (adaptée d'après Toderas, 1990) . . . . .	22
1.9	Profil du taux de génération de chaleur ( $q'''$ ) et flux neutronique ( $\Phi$ ) dans le cœur d'un réacteur cylindrique homogène et nu (adaptée à partir de Toderas, 1990) . . . . .	25
1.10	Effet du réflecteur sur la distribution radiale du flux neutronique thermique (adaptée à partir de Toderas, 1990) . . . . .	25
1.11	Profil de la distribution radiale de la puissance avec des barres de contrôles insérées (adaptée à partir de Toderas, 1990) . . . . .	26
1.12	Profils de température dans un REP (adaptée à partir de DOE, 1992) . . .	27
1.13	Distribution radiale de la température dans un élément combustible . . . . .	28
1.14	Rapport entre le nombre de NUSSELT calculé pour une section non circulaire ( $Nu_{D_h}$ ) et le nombre de NUSSELT pour une section circulaire ( $Nu_{s.c.}$ ) en fonction de P/D (adaptée d'après Toderas, 1990) . . . . .	32
1.15	Réseau triangulaire de piles à combustibles . . . . .	33
1.16	Couche limite développée autour d'un cylindre vertical (Lienhard IV and Lienhard V, 2005) . . . . .	36
1.17	Les corrections qui doivent être appliquées sur $h(x)$ (1.19a) et $h_L$ (1.19b) dans le cas d'un cylindre vertical (Lienhard IV and Lienhard V, 2005) . .	36
1.18	Courbe de Nukiyama . . . . .	37
1.19	Les différentes régions de transfert de chaleur et natures d'écoulement convectif pour un écoulement en ébullition (modifiée à partir de Toderas, 1990) . . . . .	39
2.1	Schéma approximatif du réacteur TRIGA-CENM . . . . .	43

2.2	Arrangement typique des éléments combustibles . . . . .	44
2.3	Assemblage élément combustible-gaine en acier inoxydable avec raccords en triflute . . . . .	46
2.4	Barre de contrôle avec prolongateur . . . . .	47
2.5	Convection naturelle dans le cœur du réacteur TRIGA . . . . .	49
2.6	Boucles de refroidissement du réacteur TRIGA typique . . . . .	50
2.7	Un schéma de couplage neutronique/thermohydraulique . . . . .	61
3.1	Quelques arrangements typiques de sous-canaux . . . . .	67
3.2	Schéma d'un sous-canal de géométrie triangulaire . . . . .	68
3.3	(a) Réseau hexagonal de sous-canaux, (b) sous-canal triangulaire, (c) volume de contrôle d'un sous-canal . . . . .	69
3.4	Localisation des différents paramètres thermohydrauliques . . . . .	69
3.5	Effet de viscosité sur le champ de vitesse dans un sous canal . . . . .	70
3.6	Schéma illustratif du modèle simplifié (1-D) . . . . .	72
3.7	Principe du bilan de masse dans un volume de contrôle d'un sous-canal <i>i</i> .	73
3.8	Puissance reçue par le sous canal <i>i</i> en provenance des piles à combustibles	74
3.9	Schéma illustrant l'écoulement d'un fluide à travers un rétrécissement et un élargissement brusque dans un sous-canal . . . . .	78
3.10	Flux de masse axial et celui transversale échangé entre les sous-canaux . .	79
3.11	Principe du bilan de masse sur un volume de contrôle d'un sous-canal <i>i</i> en contact avec des sous-canaux <i>k</i> . . . . .	80
3.12	Volume de contrôle exact et approché sur lequel est établie l'équation de conservation de quantité de mouvement transversale . . . . .	83
4.1	Discrétisation axial d'un sous-canal . . . . .	91
4.2	Maillage uniforme du champ de pression . . . . .	103
4.3	Schéma d'un maillage décalé . . . . .	103
4.4	Schéma d'un sous-canal dans le cœur d'un réacteur de recherche . . . . .	106
4.5	Procédure de résolution des équations gouvernantes du modèle thermohydraulique . . . . .	108
4.6	Système d'indexation des sous-canaux . . . . .	112
5.1	Application du schéma de différence finie centré au dernier nœud <i>N</i> du domaine de calcul . . . . .	129
5.2	Schéma d'un sous-canal isolé avec vitesses transversales imposées . . . .	132
5.3	Evaluation de l'ordre de précision observé en fonction de l'espacement du maillage $\eta$ . . . . .	136
5.4	Profil de la vitesse axiale comparé à la solution analytique pour différents maillages . . . . .	136
5.5	Profil de l'enthalpie comparé à la solution analytique pour différents maillages	137
5.6	Profil de la pression comparé à la solution analytique pour différents maillages	137
5.7	Arrangement de quatre sous-canaux . . . . .	139
5.8	Profil de la vitesse axiale dans le sous-canal <i>i</i> et les sous-canaux <i>k</i> comparé à la solution analytique pour différents nombres de nœuds . . . . .	142

5.9	Profil de la vitesse transversale dans le sous-canal $i$ et les sous-canaux $k$ comparé à la solution analytique pour différents nombres de noeuds . . . . .	142
5.10	Profil de l'enthalpie dans le sous-canal $i$ et les sous-canaux $k$ comparé à la solution analytique pour différents nombres de noeuds . . . . .	143
5.11	Profil de la pression dans le sous-canal $i$ et les sous-canaux $k$ comparé à la solution analytique pour différents nombres de noeuds . . . . .	143
5.12	Ordre de précision observé (OOA) calculé pour la vitesse axiale, vitesse transversale, enthalpie et la pression . . . . .	145
5.13	Arrangement de 24 sous-canaux de géométrie triangulaire . . . . .	147
5.14	Ordre de précision observé calculé pour quelques sous-canaux dans le cas d'un réseau composé de 24 sous-canaux . . . . .	148
5.15	Profil de la vitesse axiale pour quelques sous-canaux dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux . . . . .	150
5.16	Profil de la vitesse transversale calculé sur le sous-canal 10 dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux . . . . .	151
5.17	Profil de la température pour quelques sous-canaux dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux . . . . .	151
5.18	Profil de la pression pour quelques sous-canaux dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux . . . . .	152
5.19	Cœur du réacteur IPR-R1 . . . . .	155
5.20	Postions longitudinales des six éléments constituants le cœur du réacteur IPR-R1 (Les valeurs sont données en cm) . . . . .	156
5.21	Discrétisation en sous-canaux du cœur du réacteur IPR-R1 . . . . .	157
5.22	Facteur maximal de la puissance radiale des éléments combustibles du cœur du réacteur IPR-R1 . . . . .	158
5.23	Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 110kW . . . . .	165
5.24	Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 160kW . . . . .	165
5.25	Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 210kW . . . . .	166
5.26	Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 265kW . . . . .	166
5.27	Puissance dissipée dans les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 . . . . .	167
5.28	Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 110kW . . . . .	168
5.29	Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 160kW . . . . .	169
5.30	Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 210kW . . . . .	170

5.31	Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 265kW . . . . .	171
5.32	Le débit massique axial traversant les sous-canaux 6, 12 et 3 . . . . .	171
6.1	Coupe verticale du réacteur TRIGA MARK II modélisé par le code MCNP . . . . .	175
6.2	Coupe verticale du cœur du réacteur TRIGA MARK II modélisé par le code MCNP . . . . .	175
6.3	Coupe radiale du cœur du réacteur TRIGA MARK II modélisé par le code MCNP . . . . .	176
6.4	Coupe radiale en 3D du cœur du réacteur TRIGA MARK II avec les cinq barres de contrôles retirées (modélisation MCNP) . . . . .	176
6.5	Distribution du facteur de pic de la puissance radiale dans le cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	178
6.6	La configuration du cœur du réacteur TRIGA MARK II avec laquelle le calcul neutronique est effectué . . . . .	179
6.7	Discrétisation axiale en cellules de volumes identiques d'un élément combustible du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	181
6.8	Distribution du facteur de puissance axiale $f_z$ le long de la partie active de quelques éléments combustibles du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	182
6.9	Distribution du facteur de puissance axiale $f_z$ le long de la partie active des barres de contrôles du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	182
6.10	Lissage gaussien de la distribution de la puissance axiale $f_z$ en fonction de la longueur axiale de la partie active de l'élément combustible . . . . .	183
6.11	Discrétisation en sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	184
6.12	Distribution de la température de l'eau dans le plan médian du cœur du réacteur TRIGA MARK II ( $z = L/2$ ) . . . . .	186
6.13	Distribution de la température de l'eau à la sortie du cœur du réacteur TRIGA MARK II ( $z = L$ ) . . . . .	186
6.14	Température moyenne calculée à la sortie des sept rings du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	187
6.15	Distribution de la température le long de quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	188
6.16	Distribution de la densité de l'eau le long de quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	188
6.17	Distribution du débit massique axiale dans quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	189
6.18	Différence entre le débit massique axial entrant et sortant des sous-canaux des rings A, B et C . . . . .	190
6.19	Différence entre le débit massique axial entrant et sortant des sous-canaux des rings D et E . . . . .	191
6.20	Différence entre le débit massique axial entrant et sortant des sous-canaux des rings F et G . . . . .	191
6.21	Variation de la température de sortie en fonction de la température d'entrée du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	192

---

6.22 Variation du débit massique axial moyen en fonction de la température d'entrée du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	193
6.23 Distribution de la température de sortie du cœur du réacteur TRIGA MARK II pour une température d'entrée de 33°C . . . . .	194
6.24 Distribution de la température de sortie du cœur du réacteur TRIGA MARK II pour une température d'entrée de 45°C . . . . .	194
6.25 Variation de la température de sortie en fonction de la puissance de fonctionnement du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	195
6.26 Variation du débit massique axial en fonction de la puissance de fonctionnement du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	196
6.27 Variation du flux de chaleur axial local, flux de chaleur critique axial et du MDNBR en fonction de la position axiale dans le sous-canal 16 pour une température d'entrée de l'eau de 45°C . . . . .	199
6.28 Variation du flux de chaleur critique et du MDNBR en fonction de la température d'entrée de l'eau du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	200
6.29 Variation du MDNBR en fonction de la position axiale dans le sous-canal chaud . . . . .	200
6.30 Variation du MDNBR en fonction de la puissance opérationnelle du cœur du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	201
6.31 Variation du DNBR en fonction de la position axiale pour différentes puissances du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	202
6.32 Marges typiques du DNB basés sur la corrélation des données DNB (d'après Fenech, 1981) . . . . .	203



# Liste des tableaux

1.1	Quelques valeurs typiques du coefficient d'échange thermique par convection pour différents régimes d'écoulements (adapté à partir de El-Wakil, 1971) . . . . .	29
2.1	Matériaux du réacteur TRIGA MARK II . . . . .	45
2.2	Paramètres de conception principaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II	48
2.3	Réglages des paramètres de sûreté pour le réacteur TRIGA . . . . .	51
2.4	Comparaison entre les résultats de simulation du code NCTRIGA et les résultats expérimentaux . . . . .	56
3.1	Les coefficients $a$ , $b_1$ et $b_2$ utilisés dans le calcul du coefficient de perte de charge linéaire pour un écoulement laminaire et turbulent dans un réseau hexagonal (adapté d'après Toderas, 1990) . . . . .	77
4.1	Système d'indexation adopté dans la figure (4.6) . . . . .	112
5.1	L'erreur relative de discréétisation ( $RDE_\Phi$ ) [%] et l'ordre de précision observé $r_\Phi$ calculé pour l'enthalpie ( $h$ ) et le débit massique ( $\dot{m}$ ) . . . . .	128
5.2	Quelques caractéristiques physiques et géométriques du canal chaud du réacteur TRIGA MARK II du Bangladesh . . . . .	130
5.3	Comparaison entre les résultats de simulation obtenus par le code SACATRI et ceux produits par le code NCTRIGA . . . . .	131
5.4	Données relatives au premier test de vérification du modèle tridimensionnel du code SACATRI . . . . .	134
5.5	Les différents maillages utilisés durant le premier test de vérification du modèle tridimensionnel du code SACATRI . . . . .	135
5.6	Erreur de discréétisation relative [%] calculée pour l'enthalpie, la vitesse axiale et la pression pour différentes maillages . . . . .	135
5.7	Les paramètres utilisés dans le test de vérification du code SACATRI dans le cas d'un sous-canal triangulaire entouré de trois sous-canaux . . . . .	141
5.8	L'erreur relative de discréétisation[%] calculée pour l'enthalpie ( $h$ ), la vitesse axiale ( $v$ ) et transversale ( $w$ ) et la pression ( $P$ ) pour différentes tailles de maillages . . . . .	144
5.9	Données physiques et géométriques utilisées pour la vérification du code SACATRI simulant l'écoulement du fluide réfrigérant dans une configuration de 24 sous-canaux . . . . .	147

5.10 (Le rapport de $RDE_q$ (maillage étiré) sur $RDE_q$ (maillage fin) pour La vitesse axiale ( $v$ ) . . . . .	149
5.11 Le rapport de $RDE_q$ (maillage étiré) sur $RDE_q$ (maillage fin) pour La vitesse transversale ( $w$ ) . . . . .	149
5.12 Le rapport de $RDE_q$ (maillage étiré) sur $RDE_q$ (maillage fin) pour La température ( $T$ ) . . . . .	150
5.13 Données géométriques des différentes parties du cœur du réacteur IPR-R1 .	156
5.14 Quelques caractéristiques thermohydrauliques des sous-canaux où les températures sont mesurées . . . . .	159
5.15 Les résistances hydrauliques calculées à l'entrée des sous-canaux . . . . .	160
5.16 Les résistances hydrauliques calculées à la sortie des sous-canaux . . . . .	162
5.17 Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACA-TRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 110kW . .	163
5.18 Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACA-TRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 160kW . .	163
5.19 Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACA-TRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 210kW . .	164
5.20 Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACA-TRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 265kW . .	164
6.1 Les différents coefficients résultant du lissage gaussien de la distribution de la puissance axiale $f_z$ . . . . .	183
6.2 Données géométriques et physiques utilisées pour le calcul des paramètres thermohydrauliques des sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II	185
6.3 Valeurs du MDNBR pour quelques réacteurs de type TRIGA . . . . .	204

# Liste des abréviations

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronymme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé, auquel cas nous présentons une traduction.

<b>AHF</b>	Axial Heat Flux	<i>Flux de Chaleur Axial</i>
<b>APF</b>	Axial Power Factor	<i>Facteur de Puissance Axial</i>
<b>AIAA</b>	American Institute of Aeronautics and Astronautics	
<b>ACHF</b>	Axial Critical Heat Flux	<i>Flux de Chaleur Critique Axial</i>
<b>CFD</b>	Computational Fluid Dynamics	
<b>CHF</b>	Critical Heat Flux	<i>Flux de Chaleur Critique</i>
<b>CPU</b>	Central Processing Unit	Unité centrale de traitement
<b>DNB</b>	Departure from Nucleate Boiling	
<b>EDP</b>	Equations aux dérivées partielles	
<b>FOA</b>	Formel Order of Accuracy	<i>Ordre de précision formel</i>
<b>GA</b>	General Atomics	
<b>HPLWR</b>	High-Performance Light-Water Reactor	
<b>HEU</b>	High Enriched Uranium	<i>Uranium Fortement Enrichi</i>
<b>LEU</b>	Low Enriched Uranium	<i>Uranium Faiblement Enrichi</i>
<b>MMS</b>	Method of Manufactured Solution	<i>Méthode de solutions fabriquées</i>
<b>MCNP</b>	Monte-Carlo N-Particule transport	
<b>MDNBR</b>	Minimum Departure from Nucleate Boiling Relative	
<b>ONB</b>	Onset of Nucleate Boiling	
<b>OOA</b>	Observed Order of Accuracy	<i>Ordre de précision observé</i>
<b>PSBR</b>	Penn State Breazeale Reactor	
<b>pcm</b>	per cent mille	pour cent mille

<b>RDE</b>	Relative Discretization Error	<i>Erreur de discrétisation relative</i>
<b>REL</b>	Réacteurs à Eau Légère	
<b>REP</b>	Réacteurs à Eau Pressurisée	
<b>REB</b>	Réacteurs à Eau Bouillante	
<b>SC</b>	Sous-Canaux	
<b>SACATRI</b>	Sub-channel Analysis Code for Application to TRIGa	
<b>SIMPLE</b>	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations	
<b>TRIGA</b>	Training Research Isotope General Atomics	
<b>TDMA</b>	Tri-Diagonal Matrix Algorithm	
<b>VC</b>	Volume de Contrôle	

# Liste des notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de conserver les mêmes notations d'un chapitre à l'autre. Nous présentons tout d'abord une liste générale puis des listes relatives aux différents chapitres. On notera que seules les notations qui diffèrent de celles précédemment définies seront données dans ces listes. Enfin, certaines notations, apparaissant uniquement de manière ponctuelle, ont été omises.

## Notations générales

$A$	surface
$C_p$	chaleur spécifique
$D$	Diamètre
$D_h$	diamètre hydraulique
$g$	force gravitationnelle
$h$	enthalpie
$J_o$	fonction de Bessel
$L$	longueur
$\dot{m}$	débit massique
$P$	pression
$P_c$	périmètre chauffant
$P_m$	périmètre mouillé
$T$	température
$V$	volume
$v$	vitesse axiale
$w$	vitesse transversale
$w'$	Flux de masse du mélange turbulent
$\rho$	densité volumique
$\nu$	viscosité cinématique
$\mu$	viscosité dynamique

## Chapitre 1

$E_c$	énergie cinétique
$G$	énergie produite par fission
$h$	coefficent d'échange thermique par convection
$k$	conductivité thermique
$L_e$	longueur d'extrapolation
$N$	nombre de noyaux fissiles par unité de volume
$P^*$	pression motrice
$\dot{Q}$	taux de génération de chaleur
$q'''$	génération interne de chaleur
$\vec{q}''$	flux de chaleur
$T_o, T_b$	température caractéristique de l'écoulement
$T_p$	température de la paroi
$u$	énergie interne
$\vec{v}$	vecteur vitesse
$v_x$	composante de la vitesse suivant l'axe $x$
$v_y$	composante de la vitesse suivant l'axe $y$
$v_z$	composante de la vitesse suivant l'axe $z$
$V_f$	volume du combustible
NU	nombre de Nusselt
Re	nombre de Reynolds
St	nombre de Stanton
Pr	nombre de Prandtl
Gr	nombre de Grashof
Ra	nombre de Rayleigh
$\sigma$	tension superficielle
$\alpha$	coefficent de diffusivité thermique
$\tau$	contrainte de cisaillement
$\beta$	coefficent d'expansion thermique
$\rho_o$	densité de référence
$\sigma_f$	section efficace microscopique de fission
$\Phi$	fonction de dissipation
$\varphi$	flux de neutrons
$\psi$	facteur de correction
$\nabla$	opérateur divergence
$\vec{\nabla}$	opérateur gradient
$\Delta$	opérateur laplacien

## Chapitre 3

$f$	coefficient de perte de charge linéaire
$K$	coefficient de perte de charge singulière
$K_e$	coefficient de perte de charge singulière pour un élargissement brusque
$K_r$	coefficient de perte de charge singulière pour un rétrécissement brusque
$Q_i$	puissance thermique par unité de volume dissipée dans le sous-canal $i$
$Q_f$	puissance thermique générée par les éléments combustible
$\Delta x$	écart entre deux gaines voisines
$F$	résistance hydraulique latérale
$\Delta P_{fric}$	chute de pression due au frottement
$\beta$	paramètre adimensionnel du mélange turbulent
$\bar{v}$	vitesse moyenne
$\xi$	coefficient adimensionnel de perte de charge latéral par frottement
$\Delta y$	distance séparant les centroïdes de deux sous-canaux voisins
$\Delta z$	longueur élémentaire d'un volume de contrôle
$\delta$	symbole de Kronecker
$\rho_{ik}^*, v_{ik}^*$	valeur calculée à l'interface séparant deux sous-canaux adjacents

## Chapitre 4

$A_{SC}$	section du sous-canal
$a$	coefficients des équations discrétisées
$h$	profondeur du cœur à laquelle la pression statique est calculée
$L_{ch}$	longueur cheminée
$[M]$	matrice contenant les éléments $a$
$N$	nombre de noeuds
$N_{SC}$	nombre total des sous-canaux
$N_C$	nombre de surface d'interconnexion
$N_p$	nombre de pile à combustible
$P_s$	pression statique
$P^*$	champ de pression initial ou temporaire
$P^{New}$	valeur actuelle de la pression
$P^{OLD}$	valeur de la pression à l'itération précédente
$P_{atm}$	pression atmosphérique
$Res_g$	résidu global
$Res_i$	résidu local calculé sur chaque sous-canal $i$
$Su$	second membre
$v_{i_0}$	vitesse axiale à l'entrée du sous-canal $i$
$v_{i_L}$	vitesse axiale à la sortie du sous-canal $i$
$w_{i_0}$	vitesse transversale à l'entrée du sous-canal
$P_{i_0}$	pression à l'entrée du sous-canal $i$
$P_{i_L}$	pression à la sortie du sous-canal $i$

$PM$	précision massique
$R_{mi}$	résidu massique sur sous-canal $i$
$S_{i,axial}$	terme source dans l'équation de quantité de mouvement axiale
$S_{i,transversale}$	terme source dans l'équation de quantité de mouvement transversale
$v^*, w^*$	champ de vitesse axiale et transversale initial ou temporaire
$\Phi$	variable de l'écoulement
$\delta t'$	pas de temp virtuelle
$\delta P$	correction de pression
$\delta v$	correction de la vitesse axiale
$\delta w$	correction de la vitesse transversale
$\alpha_p$	coefficient de sous-relaxation
$\varepsilon$	précision du solveur
$[\lambda]$	matrice d'indexation des sous-canaux
$\lambda_{ci}$	éléments de la matrice $[\lambda]$
$[\lambda]^T$	transposé de la matrice $[\lambda]$

## Chapitre 5

$Err$	erreur de discréétisation
$k, \alpha', h_o, h'_o$	coefficients des solutions fabriquées
$q$	taille du maillage
$\bar{Q}$	facteur de raffinement du maillage
$r$	ordre de précision
$RDE_\Phi$	erreur relative de discréétisation de la variable $\Phi$
$S_\varphi$	terme source
$T_{exp}$	température mesurée expérimentalement
$T_{simulation}$	température calculé numériquement
$T_s^{SACATRI}$	température de sortie calculée par le code SACATRI
$v_o, v'_o$	coefficients des solutions fabriquées
$\Phi_a$	solution exacte
$\Phi_n$	solution numérique
$\Gamma$	opérateur différentiel
$\varphi$	vecteur de variables inconnues
$\hat{\varphi}$	solution fabriquée
$\eta$	espacement du maillage
$\alpha, \beta, \omega, b$	coefficients des solutions fabriquées

## Chapitre 6

$A_c$	section chauffée de l'éléments combustible
$ACHF$	flux de chaleur critique axial
$D_{fr}$	diamètre de l'élément combustible
$f_{HR}$	facteur de pic de puissance de l'élément chaud
$f_{tot}$	facteur de pic de la densité de puissance totale
$f_r$	facteur de pic de la densité de puissance radiale

---

$f_z$	facteur de pic de la densité de puissance axiale
$G_o, z_c, \alpha, \alpha'$	coefficients de la fonction du lissage gaussien
$h_{s,crit}$	échange de chaleur critique du film
$K_{eff}$	coefficient de multiplication effectif
$N$	nombre d'élément combustible
$(P_{rod})_{max}$	puissance maximale libérée par un élément combustible
$(P_{rod})_{av}$	puissance moyenne libérée par un élément combustible
$P$	puissance du réacteur
$P_{abs}$	pression absolue
$T_b$	température caractéristique de l'écoulement (bulk temperature)
$T_{s,crit}$	température critique du film
$T_s$	température de saturation
$T_f$	température du fluide

## Indice

$c$	surface d'interconnexion entre les sous-canaux
$E$	index du noeud est
$e$	index du noeud situé sur la face est du volume de contrôle
$i$	index du sous-canal $i$
$ik$	index de l'interface de connexion séparant deux sous-canaux adjacents $i$ et $k$
$j$	index de la position axial (suivant l'axe $z$ ) dans le sous-canal
$k$	index du sous-canal $k$
$nb$	index des noeuds voisins
$P$	index du noeud central
$W$	index du noeud ouest
$w$	index du noeud situé sur la face ouest du volume de contrôle

## Superscript

$n$	actuelle itération
$n-1$	itération précédente
$^{**}$	valeur dependant de la direction du flux de masse latéral
$*$	valeur temporaire
Bot	partie inférieure du cœur du réacteur
Top	partie supérieure du cœur du réacteur



# Introduction générale

Depuis la découverte des premières formes de l'énergie, l'humanité n'a cessé de l'utiliser excessivement dans les différents aspects de la vie quotidienne. Dès lors, et jusqu'à présent, l'énergie reste un enjeu majeur tant au plan scientifique et industriel qu'au niveau politique et socio-économique. A l'aube du 19<sup>ème</sup> siècle, l'accroissement exponentiel de la demande énergétique, accéléré par les progrès technologiques successifs que connaîtait l'époque, incitait à la découverte et à la recherche de nouvelles source d'énergie plus efficaces pouvant répondre à la demande mondiale sur l'énergie. La consommation de l'énergie assez foisonnante, atteignait son apogée dans les dernières années du vingtième siècle et qui connaissaient le plus grand boum économique de l'époque moderne.

Les premières sources d'énergie utilisées durant les premiers pas vers l'ère industrielle sont les énergies fossiles, notamment le charbon et le pétrole. En revanche, à cause de la concentration de cette énergie dans quelques régions dans le monde, et vu la crise énergétique mondiale de 1973, il apparut une tendance politique qui intensifia la recherche d'une alternative énergétique, assurant une indépendance relative vis-à-vis des énergies traditionnelles fossiles. Ainsi, un grand intérêt commença à naître vers le développement de l'énergie nucléaire et des énergies renouvelables.

Les énergies renouvelables, en se basant sur leur nature permanente, peuvent contribuer avec une grande portion d'ici une trentaine d'années dans la production totale de l'énergie. Ces énergies sont caractérisées par leur propreté tel que avec 0 % d'émission de *CO<sub>2</sub>*, elles n'ont aucun impact destructeur sur l'environnement. L'utilisation de ces énergies apparaît très prometteuse dans le but de gagner le défi concernant la lutte contre le réchauffement climatique. Actuellement, ces énergies sont peu employées à cause de leurs coûts élevés devant les autres formes d'énergies fossiles, et aussi à cause des différents problèmes technologiques freinant leurs applications à une grande échelle. Donc, en attendant le développement durable de ces énergies, divers pays dans le monde ont trouvé du nucléaire un remède momentané très compétitif et rentable (du point de vu de l'abondance de la matière première qui est l'uranium, et du coût de la production).

---

L'année 1939 est un fait marquant dans l'histoire de l'humanité. Elle connut la découverte de la fission nucléaire qui permettait par la suite l'exploitation de l'énergie interne du noyau atomique. Il s'agit d'une réaction nucléaire exothermique où la masse nucléaire est transformée en énergie. Le mécanisme de cette réaction est très simple dans lequel un noyau d'un atome lourd absorbe un neutron, causant ainsi la division de l'atome cible en donnant naissance à des fragments de fission et de nouveaux neutrons (2.5 neutrons en moyenne). Ces nouveaux neutrons nés, et dans des conditions appropriées, peuvent être utilisés pour reproduire une autre réaction de fission sur d'autres noyaux atomiques. Ce processus conduit à une réaction de fission en chaîne qui libère une grande quantité d'énergie. L'énergie libérée par la fission est d'environ  $200\text{MeV}$  (ou  $3.2 \times 10^{-11} \text{ J}$ ) par fission. Cette énergie se manifeste sous différentes formes notamment l'énergie cinétique des fragments de fissions, l'énergie cinétique des neutrons nés par les réactions de fissions, ainsi que l'énergie des neutrinos et celle des rayonnements gamma.

Les réacteurs nucléaires sont les systèmes énergétiques principaux des centrales électronucléaires. Ils jouent le rôle des chaudières dans les centrales thermiques à vapeur. Le combustible utilisé dans les coeurs de ces réacteurs, est généralement constitué de la matière fissile (uranium par exemple). Le cœur d'un réacteur est conçu de telle sorte qu'il puisse exploiter et contrôler la réaction en chaîne sans qu'elle conduise à un effet d'avalanche pouvant faire fondre toutes les barrières de sécurité du réacteur. Les réacteurs nucléaires peuvent être classés en deux principales catégories : (i) les réacteurs de puissance, fonctionnant à des puissances élevées, et dont le but essentiel est d'exploiter la grande quantité de chaleur, générée par le cœur, dans la production de l'électricité, et (ii) les réacteurs de faible puissance variant de 0 jusqu'à 20 MW thermiques. Ces réacteurs sont souvent appelés des réacteurs de recherche. Ils sont essentiellement destinés à la recherche scientifique.

TRIGA (Training Research Isotope General Atomics) est l'un des classes des réacteurs de recherche les plus utilisés conçus par la société américaine Générale Atomics (GA). Ils sont refroidis à l'eau et principalement par le mécanisme de convection naturelle. Ils sont caractérisés par une sécurité intrinsèque et un encombrement très réduit. Le royaume du Maroc est l'un des pays qui sont dotés de cette filière de réacteurs ; il s'agit du réacteur TRIGA MARK II installé au Centre d'Etude Nucléaire de la Maâmora (CENM) fonctionnant à une puissance nominale de 2MW. L'acquisition de ce réacteur était dans le but de promouvoir la technologie nucléaire dans le pays et l'exploitation du flux neutronique dans la production des radio-isotopes utilisés dans les diagnostics médicaux et la biologie ainsi que dans des applications industrielles et agricoles.

Bien que la neutronique constitue la discipline de base pour les réacteurs nucléaires,

---

de nombreuses autres disciplines de la physique interviennent aussi bien dans la phase de conception d'un réacteur, que dans l'élaboration des procédures d'exploitation et cela aussi bien en fonctionnement normal qu'en cas d'incident ou d'accident. Parmi ces disciplines, la thermohydraulique, science regroupant la mécanique des fluides et la thermique, joue un rôle important :

- En fonctionnement nominal et en situation incidentelle dans lesquelles le fluide principal joue à la fois le rôle de refroidisseur et de modérateur pour certains types de réacteurs ;
- En situation accidentelle exceptionnelle au cours de laquelle le cœur lui-même pourrait fondre et entraîner la fusion des structures environnantes pour former un fluide à haute température, ayant la double particularité d'être lui-même source de chaleur et très réactif du point de vue physico-chimique avec la plupart des matériaux.

Généralement, la thermohydraulique des coeurs des réacteurs nucléaires s'intéresse principalement à l'étude de l'écoulement du fluide réfrigérant entre les assemblages combustibles et de sa capacité à extraire la chaleur libérée dans le cœur en toute sécurité. Du point de vu sûreté, la thermohydraulique joue un rôle primordiale dans la détermination des limites de sûreté à ne pas dépasser quelle soit les conditions de fonctionnement du réacteur.

Dans le cas du réacteur TRIGA MARK II du Maroc, le défi majeur consiste à savoir si le refroidissement par convection naturelle du réfrigérant est suffisant pour permettre l'évacuation de la chaleur résiduelle du cœur. Par conséquent, la principale limitation proviendra essentiellement du risque d'apparition de la crise d'ébullition. Elle est la conséquence de l'assèchement de la paroi, qui n'étant plus mouillée voit sa température croître très rapidement avec le risque de dépasser sa température de fusion. Donc, la connaissance précise des conditions dans lesquelles peut apparaître la crise d'ébullition est nécessaire. En d'autre terme, la détermination du flux de chaleur critique et du point de Burn-out est une tâche indispensable.

Durant les trois dernières décennies, plusieurs codes de calculs thermohydrauliques ont été développés tels que les codes COBRA, FLICA, PARET, RELAP, etc. Bien qu'ils soient très puissants, l'application directe de ces codes à la simulation thermohydraulique du réacteur TRIGA MARK II, nécessite plusieurs adaptations et modifications qui restent très prohibitives et difficiles à réaliser dans la pratique. Ces modifications peuvent concerner plusieurs aspects tels que les configurations géométriques, les modèles physiques de base, notamment la modélisation du refroidissement du cœur en régime de convection naturelle, les équations constitutives, etc.

---

En outre, le concept d'établir un code thermohydraulique propre au réacteur TRIGA MARK II du Maroc devient très compétitif devant l'utilisation d'autres codes thermohydrauliques. Le facteur essentiel soutenant ce concept, c'est que divers pays, qui sont dotés de cette catégorie de réacteurs TRIGA, ont largement investi dans le développement de leurs propres codes simulant la thermohydraulique de ces réacteurs ; les codes TRISTAN et PANTERA-1P ont été développés proprement pour simuler la thermohydraulique du réacteur TRIGA de la Slovénie et de l'IPR-R1 du Brésil, respectivement. En étant convaincu et motivé par la philosophie de développement des codes de simulation numérique, et de son importance primordiale dans les études scientifiques modernes, nous nous sommes incités vers une méthodologie basée sur la conception et le développement d'un code de calcul thermohydraulique spécifique au réacteur TRIGA du Maroc.

Dans ce contexte, le but essentiel de ce travail consiste à développer un code de calcul thermohydraulique adapté aux conditions de fonctionnement de ce réacteur. Ainsi, nous avons établi le code SACATRI (**S**ub-channel **A**nalysis **C**ode for **A**pplication to **T**RIGa). Comme son nom l'indique, nous avons utilisé l'approche sous-canaux pour modéliser le cœur du réacteur. Elle consiste à discréteriser le cœur du réacteur en plusieurs sous-canaux verticaux, dans lesquels nous avons modélisé l'écoulement du fluide réfrigérant . Le code SACATRI est basé sur 4 équations de conservation plus les équations constitutives permettant de fermer le système d'équations de base. Le code permet de prévoir, dans chaque sous-canal du cœur du réacteur, la distribution des principaux paramètres thermohydrauliques (température, débit massique axial et latéral, pression, etc.) permettant de définir les limites de sûreté, à savoir le flux de chaleur critique et le point du Burn-out.

Afin que le code SACATRI puisse donner des résultats auxquelles on peut avoir confiance avec une tolérance acceptable, et reproduire précisément le réalisme physique, nous avons soumis le code aux différentes activités de vérification et de validation. En effet, la vérification et la validation sont deux activités différentes. La première est purement un exercice mathématique qui consiste à examiner la capacité du code établi, à travers la méthode numérique utilisée, à résoudre fidèlement les différentes équations du modèle en tenant compte des conditions aux limites. Le manque de benchmarks, avec une solution exacte et non triviale spécifique à ce type de problème, nous a poussés à développer une démarche originale dans ce domaine. Quant à la validation, qui est une procédure qui s'intéresse à l'exactitude du modèle mathématique utilisé, elle se base sur la comparaison entre les résultats de simulation et les mesures expérimentales.

Le présent travail s'articulera comme suit :

Dans le premier chapitre, nous esquisserons d'abord l'état de l'art de la modélisation

---

thermohydraulique à travers la description des différentes équations du transport-diffusion pour un écoulement monophasique, ainsi que quelques notions thermohydrauliques fondamentales liées aux paramètres de sûreté.

Dans le deuxième chapitre, nous menons une description des différentes caractéristiques du réacteur TRIGA MARK II du CENM y compris la conception thermohydraulique et les limites de sûreté propres au réacteur. Également, nous citons les codes de simulation existants qui peuvent être utilisés dans une analyse thermohydraulique du cœur d'un réacteur nucléaire.

Le troisième chapitre sera consacré à la description du modèle physique et mathématique du code thermohydraulique SACATRI.

Quant au quatrième chapitre, il traitera les différentes techniques numériques utilisées pour résoudre numériquement les équations thermohydrauliques du problème.

Le cinquième chapitre sera dédié aux différentes activités de vérification et de validation menées sur le code SACATRI.

Dans le dernier chapitre, nous avons appliqué le code SACATRI à la simulation thermohydraulique du cœur du réacteur TRIGA MARK II du CENM et au calcul des principaux paramètres de sûreté du réacteur.



# Chapitre 1

## La thermohydraulique et paramètres de sûreté des réacteurs

### 1.1 Introduction

Bien qu'il existe différentes conceptions, différents types de combustibles, divers processus de refroidissement des réacteurs nucléaires, ces derniers sont conçus, dans la plus part des cas, pour accomplir le même rôle ; production de l'énergie et/ou des flux de neutrons. Les centrales nucléaires sont assimilables à de grosses machines à vapeur, dont la conception de base n'a pas fondamentalement changées depuis leurs apparitions. La majorité des centrales nucléaires, en fonctionnement dans le monde, ont le plus souvent des réacteurs à eau légère (REL) ou ordinaire, caractérisés par un faible enrichissement et un refroidissement par eau. Le réacteur à eau bouillante (REB) et le réacteur à eau pressurisée (REP) représentent les deux principaux types de la filière REL. Également, un nombre très important de réacteurs de recherche de faible puissance, sont refroidis par eau légère comme les réacteurs de type TRIGA, le réacteur KAMINI, KRITZ, EOLE, etc.

Le fonctionnement en sécurité de ces réacteurs est un atout primordial pour les opérateurs de ces systèmes énergétiques. En principe, il existe trois barrières successives pour empêcher toute fuite de radioactivité vers l'environnement. La première est la gaine qui entoure le combustible, la deuxième est la cuve du réacteur et la dernière est l'enceinte de confinement qui est généralement constituée du béton qui englobe la cuve, le circuit primaire et le générateur de vapeur. Les réacteurs dotés de ces dispositifs de sûreté sont prévus pour que, même en cas d'accident, il n'y ait aucune fuite de radioactivité à l'extérieur du bâtiment réacteur. Le contrôle de ces réacteurs se fait principalement par la

---

fixation du flux de neutrons dans le cœur du réacteur, et par conséquent le niveau de puissance garantissant un fonctionnement normal et régulier.

Le refroidissement ou bien l'extraction de la chaleur générée dans le cœur de ces réacteurs se fait par la circulation d'un liquide ou gaz refroidisseur entre les assemblages combustibles. On distingue deux modes d'écoulements du réfrigérant ; un écoulement en convection libre ou naturelle et un écoulement en convection forcée. Dans quelques réacteurs, les deux modes d'écoulements sont utilisés. Généralement, la convection forcée est le mode de refroidissement des réacteurs de puissance, tandis que pour les réacteurs de recherche, la circulation naturelle de l'eau est le mécanisme principal de refroidissement.

Actuellement, plusieurs réacteurs (de quatrième génération) utilisent la circulation naturelle pour le refroidissement et l'extraction de la chaleur à partir des assemblages combustibles. Le principal avantage de la circulation naturelle est la simplicité dans la conception du réacteur. L'élimination des supports d'alimentation en puissance active, ainsi que l'élimination des pompes, peut considérablement simplifier la construction, l'exploitation et la maintenance du réacteur (ou d'un système énergétique quelconque). En outre, l'élimination des pompes et des tuyauteries d'interconnexion permet d'éviter des scénarios d'accidents associés à une pane dans une pompe, des accidents de type SBLO-CAs (Small Break Loss-of-Coolant-Accidents) (IAEA, 2005), etc. En plus, l'écoulement du réfrigérant dans les canaux du réacteur est beaucoup plus uniforme en circulation naturelle. Les caractéristiques d'un écoulement diphasique en fonction de la puissance du réacteur sont meilleures dans un système à circulation naturelle que dans un système à circulation forcée.

La neutronique seule, ne permet pas de prévoir la distribution de la puissance générée par les piles à combustibles, puisque plusieurs paramètres influent sur cette distribution. Les paramètres les plus importants liés aux limites technologiques sont la température de fusion de la gaine, les contraintes thermiques, la distribution de la température du réfrigérant ainsi que la distribution de la pression dans le cœur du réacteur. Le calcul de ces paramètres est indispensable, et fait appel à des études thermohydrauliques détaillées. Ceci implique la résolution des équations de transport de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans le but de trouver les propriétés de l'écoulement étudié (vitesse, température, pression, etc.).

A travers ce chapitre, nous essayerons de décrire brièvement les équations régissant les écoulements monophasiques, ainsi que quelques notions thermohydrauliques fondamentales liées aux paramètres de sûreté.

---

## 1.2 Les équations différentielles de conservation

L'analyse thermique des systèmes de conversion de puissance implique la résolution des équations de transport de masse, de quantité de mouvement, et d'énergie. La forme générale de ces équations dépend des conditions du système étudié. Il s'agit des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides qui sont considérés comme des milieux continus. Elles sont établies en simplifiant les équations générales de transport-diffusion, selon le niveau nécessaire de la résolution des distributions spatiales, la nature du fluide en question (compressibilité par exemple) et la précision numérique exigée par l'analyse.

Pour décrire mathématiquement l'état d'un fluide en mouvement, on a besoin de décrire la distribution des vitesses du fluide  $v = v(x, y, z, t)$  ainsi que celle de ses caractéristiques thermodynamiques telles que la pression  $P = P(x, y, z, t)$ , la température  $T = T(x, y, z, t)$  et la densité  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

### 1.2.1 Conservation de la masse

Soit un volume de contrôle (*VC*) élémentaire infinitésimal (figure 1.1) tel que les variables de l'écoulement, peuvent être considérées uniformes sur la surface engendrant le volume de contrôle. Soit  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Le bilan de masse ou l'équation de continuité de la matière est donnée par :

$$[\text{Taux de variation de la masse dans le } VC] = [\text{Débit massique entrant dans le } VC] - [\text{Débit massique sortant du } VC]$$

Mathématiquement cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t}(dxdydz) &= \rho v_x(dydz) - \left[ \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx \right] (dydz) + \\ &\quad \rho v_y(dxdz) - \left[ \rho v_y + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dy \right] (dxdz) + \\ &\quad \rho v_z(dxdy) - \left[ \rho v_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dz \right] (dxdy) + \end{aligned} \quad (1.1)$$

Après simplification on trouve la forme Eulérienne de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \quad (1.2)$$

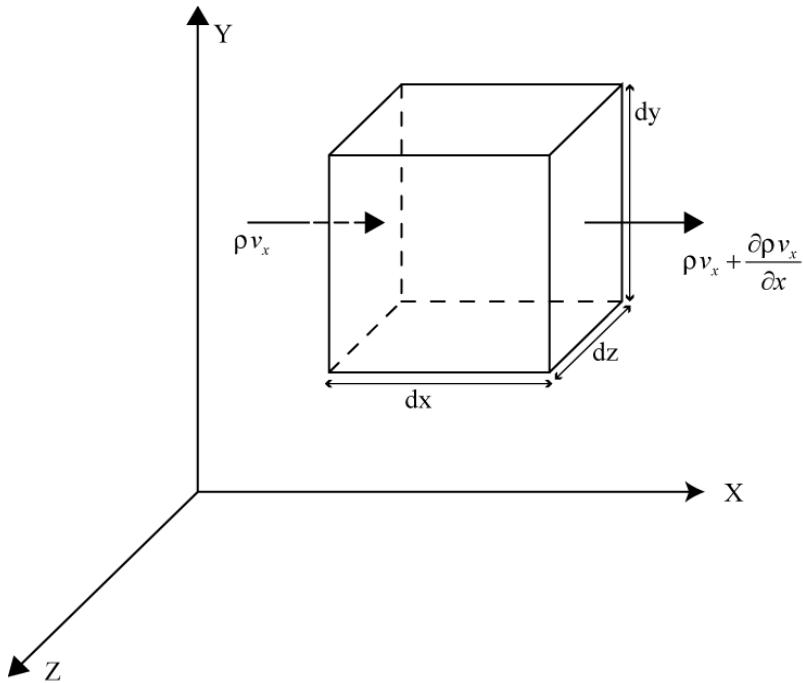


FIG. 1.1 – La composante du flux de masse dans la direction  $x$

Ou bien sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement exprime mathématiquement le fait que :

*[Le taux de variation de la quantité de mouvement dans un VC = débit de la quantité de mouvement entrant dans le VC – le débit de la quantité de mouvement sortant du VC + les forces extérieures qui s'appliquent sur le VC] (figure 1.2)*

Les forces extérieures sont des forces massiques qui s'appliquent à l'unité de masse du fluide (pesanteur, champ électrique ou magnétique), et des forces de cisaillements (par unité de surface) qui s'appliquent sur la surface du VC (figure 1.3).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour un VC, l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction  $x$  est donnée par :

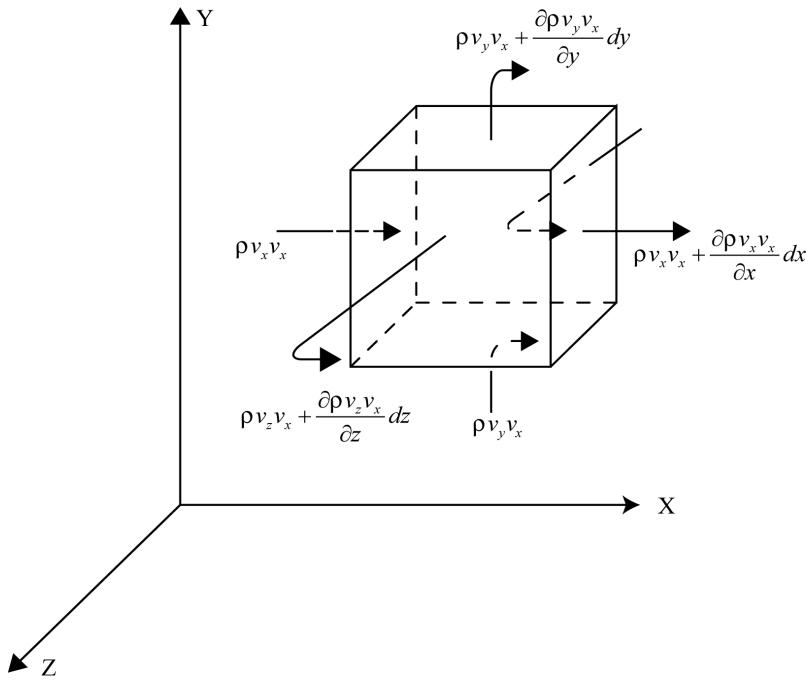


FIG. 1.2 – Schéma du bilan de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle de référence

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} (dxdydz) = & \rho v_x v_x dydz - \left( \rho v_x v_x + \frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} dx \right) dydz + \rho v_y v_x dxdz - \\
 & \left( \rho v_y v_x + \frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial y} dy \right) dxdz + \rho v_z v_x dydx - \\
 & \left( \rho v_z v_x + \frac{\partial \rho v_z v_x}{\partial z} dz \right) dydx + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \\
 & \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdz - \tau_{yx} dxdz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dydx - \tau_{zx} dydx + \\
 & \rho f_x dxdydz
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

avec :

- $\sigma_x$  est la contrainte normale dirigée suivant l'axe  $x$  (force par unité de surface).
- $\tau_{yx}$  est la contrainte tangentielle sur la facette perpendiculaire à l'axe  $y$  (force par unité de surface).
- $\tau_{zx}$  est la contrainte tangentielle sur la facette perpendiculaire à l'axe  $z$  (force par unité de surface).
- $f_x$  est la composante suivant  $x$  de la force de volume (par unité de masse).

Après simplification et réarrangement des différents termes de l'équation (1.13), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (1.5)$$

Le premier membre de l'équation (1.5) représente le taux de variation de la quantité de mouvement pour un élément de fluide suivant la direction  $x$ . Le deuxième membre de l'équation (1.5) représente la somme des forces extérieures (force de surface et force de volume) qui s'applique sur le fluide en mouvement dans le VC. La forme vectorielle de cette équation est donnée par :

$$[\text{Taux de variation de la quantité de mouvement}] = \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) \quad (1.6)$$

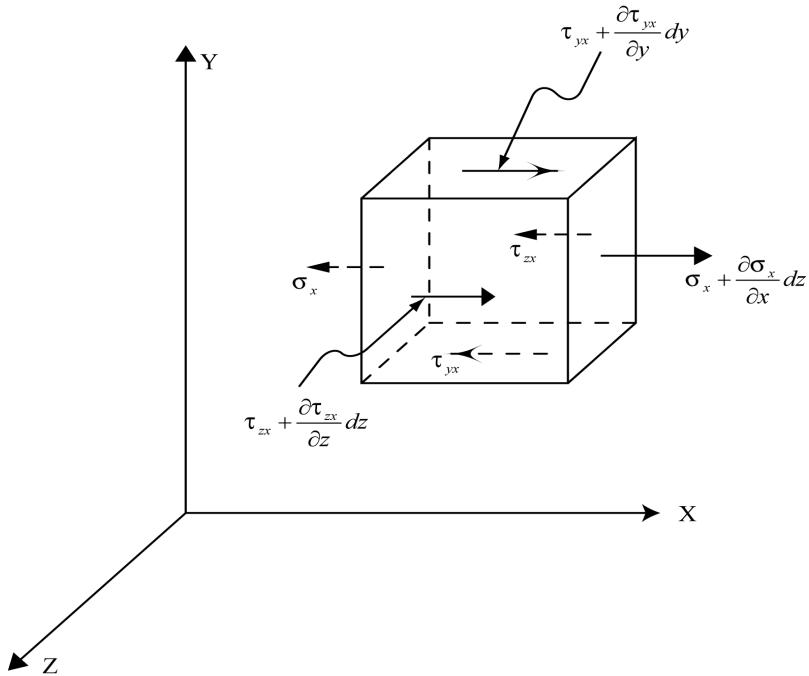


FIG. 1.3 – Composante suivant  $x$  de la contrainte de cisaillement

La tension superficielle normale  $\sigma_x$  est la somme de la pression et de la contrainte de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + \tau_{xx} \\ \sigma_y &= -p + \tau_{yy} \\ \sigma_z &= -p + \tau_{zz} \end{aligned} \quad (1.7)$$

En remplaçant l'équation (1.7) dans l'équation (1.5) et en utilisant l'équation (1.6), la forme vectorielle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est réécrite

de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = - \vec{\nabla} \cdot p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f} \quad (1.8)$$

Par l'utilisation de la notation de dérivée particulaire on obtient :

$$\rho \frac{d \vec{v}}{dt} = - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f} \quad (1.9)$$

où  $\vec{\tau}$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

Cette équation représente le principe fondamental de la dynamique. Le terme gauche de l'équation représente la masse multipliée par l'accélération. Le terme de droite est la somme des forces de volume et des forces de surface. Pour obtenir le champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , il faut résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Pour cela, il faut spécifier la densité volumique  $\rho$ , les forces de pression, les forces de volume ainsi que le gradient de la contrainte de cisaillement ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$ ). Cette dernière dépend des propriétés du fluide, de la vitesse ou du gradient de vitesse. Pour un fluide Newtonien, en utilisant la notation d'Einstein, la contrainte de cisaillement dans le fluide est donnée par :

$$\tau_{ii} = 2\mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v} \quad (1.10)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.11)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique.

En substituant les équations (1.7), (1.10) et (1.11) dans l'équation (1.5) on obtient l'expression du bilan de la quantité de mouvement suivant la direction  $x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'équation de quantité de mouvement dans les autres directions ( $y$  et  $z$ ) est obtenue facilement en permutant  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans l'équation (1.12).

En utilisant l'hypothèse d'un fluide incompréssible ( $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ), la forme générale des équations de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ &+ \rho f_x \end{aligned} \quad (1.13)$$

### 1.2.3 Conservation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à des fluides en mouvement s'énonce de la manière suivante (Charnay, 1993) :

« Pour un système matériel quelconque effectuant une transformation ouverte, entre deux états d'équilibre, la variation de la somme de l'énergie interne  $U$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  est égale à la somme du travail  $\Delta W$  et de la chaleur  $\Delta Q$  reçus par le système.»

Soit :

$$\Delta U = \Delta(U + E_c) = \Delta W + \Delta Q \quad (1.14)$$

L'énergie totale représentée par  $U + E_c$  est connue aussi par l'énergie de stagnation (stagnation energy). Quant à l'énergie potentielle, elle est généralement inclue dans le terme de travail.

Soit  $u$  la valeur de l'énergie interne par unité de masse. Pour un volume  $dxdydz$ , le premier principe de la thermodynamique se traduit mathématiquement par :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho u \right) dxdydz &= - \left( \frac{\partial \rho v_x u}{\partial x} dx \right) dydz - \left( \frac{\partial \rho v_y u}{\partial y} dy \right) dxdz - \left( \frac{\partial \rho v_z u}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &- \left( \frac{\partial q''_x}{\partial x} dx \right) dydz - \left( \frac{\partial q''_y}{\partial y} dy \right) dxdz - \left( \frac{\partial q''_z}{\partial z} dz \right) dxdy + (q''') dxdydz \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) dx \right) dydz + \left( \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v_y + \tau_{yx} v_x + \tau_{yz} v_z) dy \right) dxdz \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z v_z + \tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y) dz \right) dxdy + (v_x \rho f_x + v_y \rho f_y + v_z \rho f_z) dxdydz \end{aligned} \quad (1.15)$$

En divisant les deux termes de l'équation (1.15) par  $dxdydz$  et en réécrivant cette équation en notation vectorielle, on obtient :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} [(\rho u + P) \vec{v}] = \vec{\nabla} \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}'' + q''' \quad (1.16)$$

Le premier terme du premier membre de l'équation (1.16) représente la variation locale de l'énergie interne en fonction du temps. Le deuxième terme représente la variation nette de l'énergie interne par unité de temps due à la convection ainsi que les forces de

pression. Le premier et le deuxième terme du second membre représentent respectivement les forces de viscosité et les forces massiques par unité de temps. Les deux derniers termes du second membre représentent respectivement le transfert de chaleur par conduction et rayonnement (s'il existe) et la génération interne de chaleur.

La forme de l'équation d'énergie, largement utilisée dans les problèmes de transfert de chaleur, est donnée par :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = q''' + \text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}} T) + \beta T \frac{dP}{dt} + \Phi \quad (1.17)$$

avec  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique ou de dilatation cubique à pression constante,  $C_p$  est la chaleur spécifique,  $k$  est la conductivité thermique et  $\Phi$  est la fonction de dissipation.

A partir des équations de conservation, on distingue six inconnues. Il s'agit de  $\rho$ ,  $\vec{v}$  et  $T$  (ou l'énergie interne  $u$ ),  $p$ ,  $\vec{\tau}$  et  $\overrightarrow{q''}$ . A priori, deux grandeurs additionnelles sont des données du problème ; il s'agit de  $q'''$  et l'accélération gravitationnelle  $\vec{g}$  ( $\vec{f} = \vec{g}$ ).

Pour fermer le système d'équation de conservation, on a recours d'utiliser 3 autres équations :

1. L'équation d'état du fluide :

$$\rho = \rho(p, T) \quad (1.18)$$

2. Deux équations constitutives reliant la contrainte  $\vec{\tau}$  et le flux de chaleur  $\overrightarrow{q''}$  aux inconnues du problème :

$$\overrightarrow{q''} = \overrightarrow{q''}(\rho, \vec{v}, T) \quad (1.19)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(\rho, \vec{v}, T) \quad (1.20)$$

La figure (1.4) illustre l'algorithme de résolution des équations de conservation. La région encadrée par des pointillés peut être traitée séparément dans le cas où on ne tient pas compte de la dépendance des propriétés thermophysiques des fluides avec la température.

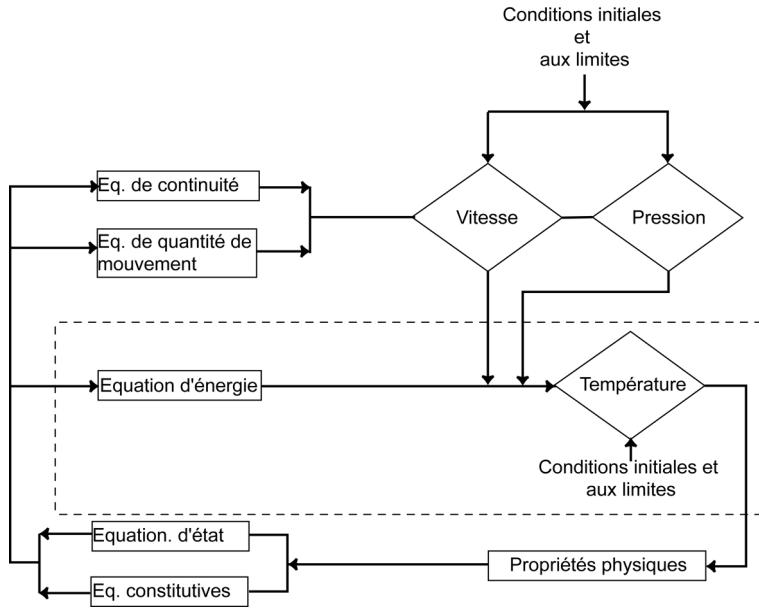


FIG. 1.4 – Algorithme de résolution des équations de conservation (adapté d'après Toderas, 1990)

### 1.3 La convection naturelle

La convection est un phénomène ou un mode de transfert de chaleur qui se déroule au sein des milieux fluides. Elle intervient particulièrement dans le cas des échanges thermiques entre des particules fluides en mouvement macroscopique et entre ces particules et une paroi. Elle apparaît lorsque le fluide en mouvement présente des inhomogénéités spatiales de température. Deux formes de convection sont distinguées ; la convection libre (ou naturelle) et la convection forcée.

La convection libre se distingue de la convection forcée par le fait que le mouvement du fluide n'est pas dû à un apport externe d'énergie mécanique, mais qu'il trouve sa source au sein même du fluide, sous l'effet conjugué d'un gradient de masse volumique et d'un champ de pesanteur. La variation de la masse volumique est généralement due à des gradients de température, des forces d'accélération (dans les centrifugeuses) ou de Coriolis (dans les transferts atmosphériques), etc. (Padet, 1997).

Pour un écoulement d'un fluide en convection naturelle, il apparaît un couplage entre les équations de bilan de quantité de mouvement et les équation de bilan d'énergie. L'une des caractéristiques spécifiques de la convection naturelle c'est la faible vitesse du fluide, Ce qui induit des faibles flux de chaleur.

### 1.3.1 Principes de fonctionnement d'une boucle de circulation naturelle

En convection naturelle, le mouvement du fluide dans une enceinte fermée (où la masse du fluide est constante) sera généré par des gradients de température, et il pourra donner naissance à une circulation du fluide contenu dans l'enceinte. La figure (1.5) illustre un exemple de la circulation de l'air dans une enceinte fermée (habitation par exemple). Si le mouvement du fluide est canalisé par des parois intérieures, de telle façon que le puits de chaleur dans la boucle soit positionné à un niveau plus élevé que la source de chaleur (figure 1.6), cela constitue un thermosiphon. Dans ce dernier, l'écoulement interne se met en place par le simple moyen des écarts de température, sans dispositifs auxiliaires. Il s'agit d'un mécanisme transportant la chaleur de la source chaude vers la source froide.

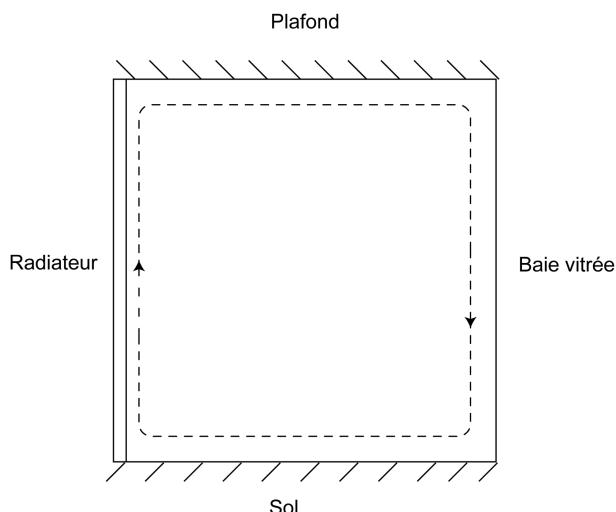


FIG. 1.5 – Exemple de circulation naturelle dans un local d'habitation (Padet, 1997)

En effet, le fluide en contact avec la source chaude se chauffe et sa densité diminue. Ensuite, le fluide en contact avec le puits de chaleur sera refroidi, ce qui implique l'augmentation de sa densité. Ainsi, une différence de densité s'établit dans le circuit. Quant à l'énergie mécanique nécessaire au mouvement, elle provient du champ de pesanteur terrestre résultant de la différence d'altitude entre la source et le puits de chaleur. Ceci produit une force de flottabilité qui pousse le liquide à travers la boucle. Ce comportement est connu par la circulation naturelle. Ce gradient de densité de fluide, établi dans le circuit, peut être causé par deux phénomènes. Soit par le gradient de température ou par le changement de phase du fluide (vapeur/liquide). Le débit dans la boucle est limité par les pertes de charges dans les différentes tuyauteries d'interconnexion.

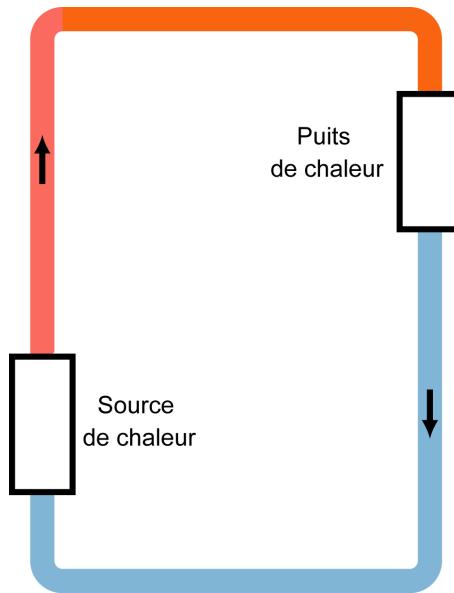


FIG. 1.6 – Schéma d'une boucle fermée rectangulaire de circulation naturelle

Plusieurs filières avancées des réacteurs nucléaires utilisent la circulation naturelle comme mécanisme de refroidissement du cœur en fonctionnement normal. Ces réacteurs sont caractérisés par leurs petites tailles. A titre d'exemple, nous distinguons le réacteur MASLWR (Multi-Application Small Light Water Reactor), le réacteur CAREM et SMART. La figure (1.7) présente un schéma illustratif de la circulation naturelle dans le cœur d'un réacteur de puissance de nouvelle génération. La circulation naturelle s'établit grâce au gradient de la densité du fluide entre la source de chaleur (cœur du réacteur) et le puits de chaleur (échangeur de chaleur externe). Dans la première boucle circule un fluide chaud de température moyenne  $T_H$  et un fluide froid ayant une température moyenne  $T_c$ .

Pour une étude thermohydraulique de ces réacteurs, il faut résoudre les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Ces équations peuvent être établies pour chaque composante du réacteur. A ce propos, des hypothèses ont été proposées pour simplifier le degré de difficulté du problème :

- L'écoulement est supposé unidirectionnel et verticalement le long de la boucle.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées uniformes.
- Application de l'approximation de Boussinesq.
- $T_C$  est constante.
- Fluide incompressible.

L'application de l'approximation de Boussinesq implique que la densité du fluide est

supposée égale à une valeur moyenne constante, à l'exception du terme qui représente la résultante du poids et de la poussée d'Archimède dans l'équation de quantité de mouvement.

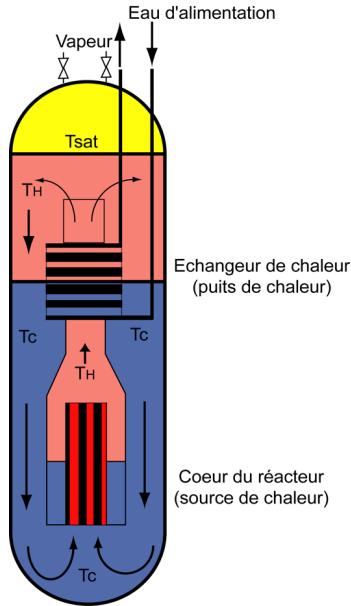


FIG. 1.7 – Schéma d'une boucle de circulation naturelle du fluide réfrigérant dans le cœur d'un réacteur de puissance (IAEA, 2005)

### 1.3.2 Adaptation des équations de bilan aux conditions de la circulation naturelle

La circulation naturelle regroupe des mécanismes convectifs dans lesquels tout ou une partie du mouvement est généré par l'action conjuguée des gradients de température et du champ de pesanteur.

Généralement, dans les problèmes de convection naturelle, l'hypothèse de Boussinesq est souvent utilisée. Soit  $\rho$  une fonction décroissante de la température telle que :

$$\rho = \rho(T) \quad (1.21)$$

L'hypothèse de Boussinesq consiste à écrire la relation (1.21) sous la forme :

$$\rho = \rho_0 \{ (1 - \beta(T - T_0)) \} \quad (1.22)$$

avec  $\beta$  est le coefficient de dilatabilité du fluide.

Si on suppose que les écarts de température sont modestes, on basera le calcul sur l'hypothèse que  $\beta$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont indépendants de la température.

En se basant sur ces hypothèses, les équations de conservation peuvent être réécrites, cette fois-ci en régime permanent, de la façon suivante :

1. Pour le bilan de masse, en tenant compte de l'hypothèse d'incompressibilité, l'équation de continuité (1.3) s'écrit :

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad (1.23)$$

2. L'équation d'énergie (1.17) est réarrangée de la façon suivante :

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = q''' + k\Delta T + \Phi \quad (1.24)$$

3. Par l'utilisation de l'équation (1.23) et en négligeant les forces de dissipation, l'équation de conservation de quantité de mouvement (1.9) est donnée par :

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (1.25)$$

Compte tenu de la dilatabilité du fluide (propriété (1.22)), décomposons  $\rho$  dans  $\rho \vec{g}$  on obtient :

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = (\rho - \rho_0) \vec{g} + \rho_0 \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{v} \quad (1.26)$$

En introduisant la pression motrice  $P^*$  définie, dans ce cas, par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P^* = \overrightarrow{\text{grad}} P - \rho_0 \vec{g} \quad (1.27)$$

il vient :

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = (\rho - \rho_0) \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P^* + \mu \Delta \vec{v} \quad (1.28)$$

ou bien en faisant intervenir la propriété (1.22), l'équation (1.28) devient :

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \beta(T - T_0) \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p^* + \mu \Delta \vec{v} \quad (1.29)$$

Le terme  $(\rho - \rho_0) \vec{g}$  représente la résultante du poids et de la poussée d'Archimède.

## 1.4 Génération de chaleur dans les réacteurs

L'énergie libérée dans un réacteur nucléaire est produite par des réactions nucléaires exothermiques où la masse nucléaire est transformée en énergie. La partie majeure de cette énergie provient de la fission d'un atome. Il s'agit d'une réaction nucléaire dans laquelle un noyau d'un atome lourd absorbe un neutron. Cette réaction, appelée fission nucléaire, peut causer la division de l'atome cible en donnant naissance à des fragments de fission et de nouveaux neutrons (2.5 neutrons en moyenne). Une petite fraction de l'énergie du réacteur provient de la capture des neutrons dans le combustible, le modérateur, et les matériaux de structures. Dans un réacteur nucléaire, la réaction de fission est maintenue de telle sorte que les nouveaux neutrons nés causent à leur tour une autre réaction de fission. Ce processus est appelé la réaction en chaîne.

L'énergie libérée par la fission est d'environ 200MeV (ou  $3.2 \times 10^{-11}$  J) par fission. Cette énergie se manifeste sous différentes formes :

- Énergie cinétique des fragments de fissions.
- Énergie cinétique des neutrons nés par les réactions de fissions.
- Énergie des neutrinos et celle provenant des rayonnements gamma.

La figure (1.8) illustre les différentes formes d'énergies libérées dans le cœur du réacteur. Les neutrons produits par la réaction en chaîne ont relativement une énergie cinétique très élevée (de l'ordre de 2 MeV). La capacité d'un neutron de déclencher une réaction de fission, est liée directement à son énergie et à la modération (effet de ralentissement des neutrons). En effet, l'énergie du neutron doit être d'un ordre de grandeur compris entre 0.01 et 0.1 eV. Ces neutrons sont appelés des neutrons thermiques. Quant à la modération, les matériaux les plus utilisés sont ceux ayant une faible masse atomique (hydrogène, deutérium, carbone).

Le taux de génération de chaleur dans le cœur d'un réacteur nucléaire est directement proportionnel aux taux de fissions dans les éléments combustibles, et au flux neutronique thermique. Le taux de génération de chaleur est aussi lié à la différence de température du fluide réfrigérant et au débit massique du fluide circulant entre les assemblages combustibles. En effet, différents paramètres peuvent influencer le taux de production de chaleur dans le réacteur. Mais généralement, cela est limité à quelques circonstances liées à la capacité du fluide réfrigérant à extraire la chaleur du cœur en toute sécurité.

---

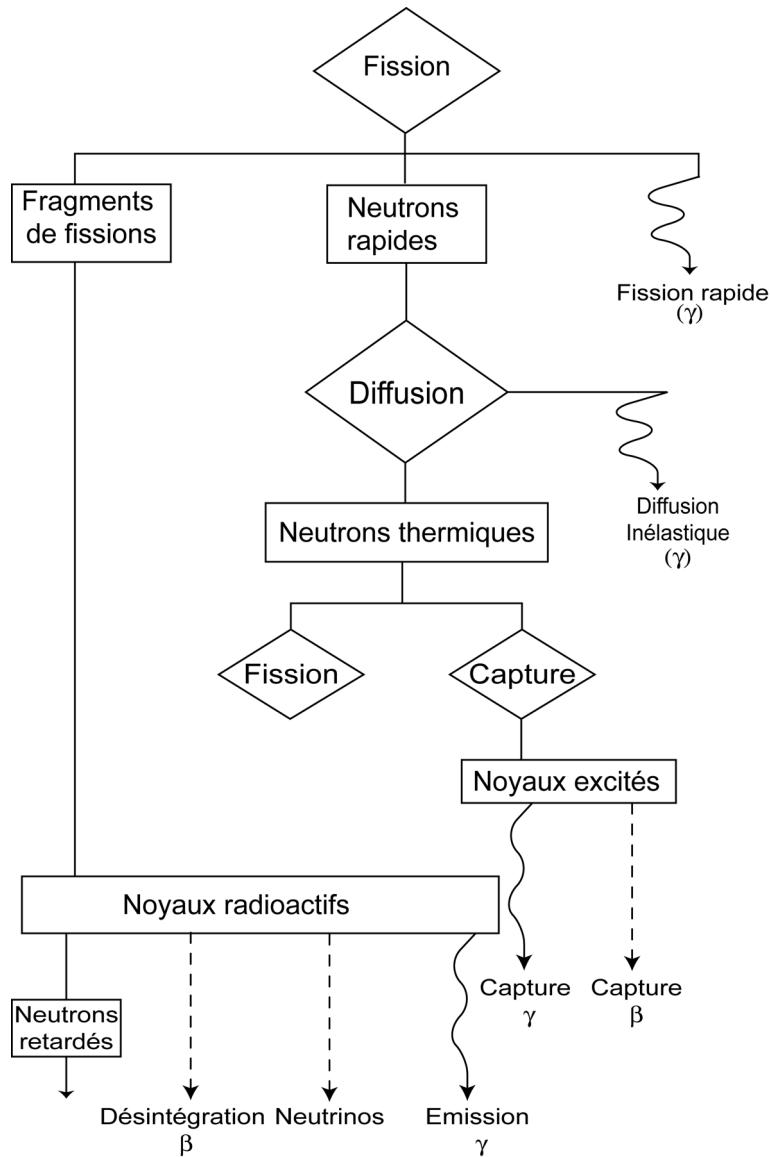


FIG. 1.8 – Les différentes formes de libération d'énergie dans un réacteur (adaptée d'après Toderas, 1990)

Le taux de fission est contrôlé par plusieurs facteurs ; la densité et le type du combustible, le flux de neutrons et l'énergie des neutrons. L'équation (1.30) montre la relation entre ces paramètres et leurs influences sur la chaleur produite dans le cœur du réacteur.

$$\dot{Q} = GN\sigma_f V_f \varphi \quad (1.30)$$

Avec :

- $\dot{Q}$  : Taux de génération de chaleur (J/sec)
- G : Energie produite par fission (J/fission)
- N : Nombre de noyaux fissiles par unité de volume (atome/cm<sup>3</sup>)
- $\sigma_f$  : Section efficace microscopique de fission (cm<sup>2</sup>)
- $V_f$  : Volume du combustible (cm<sup>3</sup>)
- $\varphi$  : Flux de neutrons (n/cm<sup>2</sup>-sec)

La puissance thermique produite par un réacteur est proportionnelle au débit du réfrigérant et à la différence de température dans le cœur du réacteur. La relation entre puissance, débit massique et gradient de température est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{Q} = \dot{m}C_p\Delta T \quad (1.31)$$

Avec :

- $\dot{m}$  : Débit massique (Kg/sec)
- $C_p$  : Chaleur spécifique du réfrigérant (J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>)
- $\Delta T$  : différence de température dans le cœur du réacteur (K)

## 1.5 Profils de puissance et du flux neutronique dans les réacteurs nucléaires

La distribution de puissance dans un réacteur nucléaire dépend de la répartition du flux neutronique dans le cœur du réacteur. Ce flux dépend de la géométrie et de l'homogénéité du cœur, ainsi que de la répartition des éléments combustibles. Notons aussi que le profil d'un flux neutronique change si on considère l'effet des barres de contrôles ou du réflexion des neutrons (présence du réflecteur ou non).

Dans un réacteur, nous distinguons deux types de distribution de neutrons ; une distribution radiale et une autre axiale. Pour un réacteur homogène nu, le cœur entier du

réacteur peut être assimilé à un seul élément combustible. Alors, le flux de chaleur par unité de volume dans le cœur d'un réacteur homogène peut être donné par :

$$q'''(\vec{r}) = q''_{\max} F(\vec{r}) \quad (1.32)$$

avec  $q''_{\max}$  représente la génération maximale de la chaleur au centre du cœur du réacteur. Cette distribution est obtenue à partir de la résolution de l'équation de diffusion pour un seul groupe d'énergie de neutrons (Reuss, 2003).

Pour un cœur cylindrique,  $q'''(\vec{r})$  est donné par :

$$q'''(r, z) = q''_{\max} J_o \left( 2.0408 \frac{r}{R_e} \right) \cos \left( \frac{\pi z}{L_e} \right) \quad (1.33)$$

avec  $J_o$  est la fonction de Bessel,  $L_e$  est une longueur d'extrapolation,  $r$  est le rayon et  $z$  la hauteur du cœur ( $r$  et  $z$  sont pris à partir du centre du cœur du réacteur). Le profil de  $q'''$  en fonction de  $r$  est représenté sur la figure (1.9).

Le flux neutronique devient nul juste à une faible distance  $\delta R$  ( $\delta R = R - R_e$  à partir de la frontière du cœur). Les distances  $\delta R$  et  $\delta L$  sont appelées des longueurs d'extrapolations qui sont relativement inférieures devant les dimensions des éléments combustibles (Longueur  $L$  et rayon  $R$ ). Dans le cas d'un cœur homogène avec réflecteur, le profil radial du flux de neutrons thermique est représenté dans la figure (1.10).

Les barres de contrôles dans le cœur du réacteur ont tendance à diminuer le flux neutronique radial et axial. Comme le montre la figure (1.11), cet effet est remarquable au voisinage de ces barres.

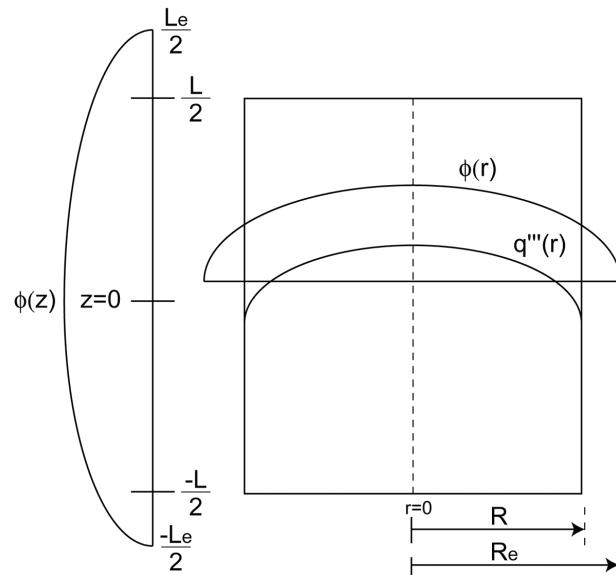


FIG. 1.9 – Profil du taux de génération de chaleur ( $q'''$ ) et flux neutronique ( $\Phi$ ) dans le cœur d'un réacteur cylindrique homogène et nu (adaptée à partir de Toderas, 1990)

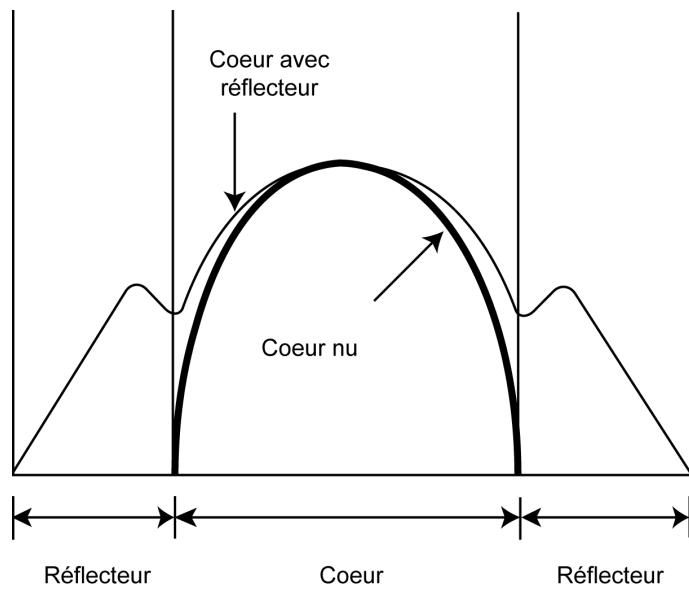


FIG. 1.10 – Effet du réflecteur sur la distribution radiale du flux neutronique thermique (adaptée à partir de Toderas, 1990)

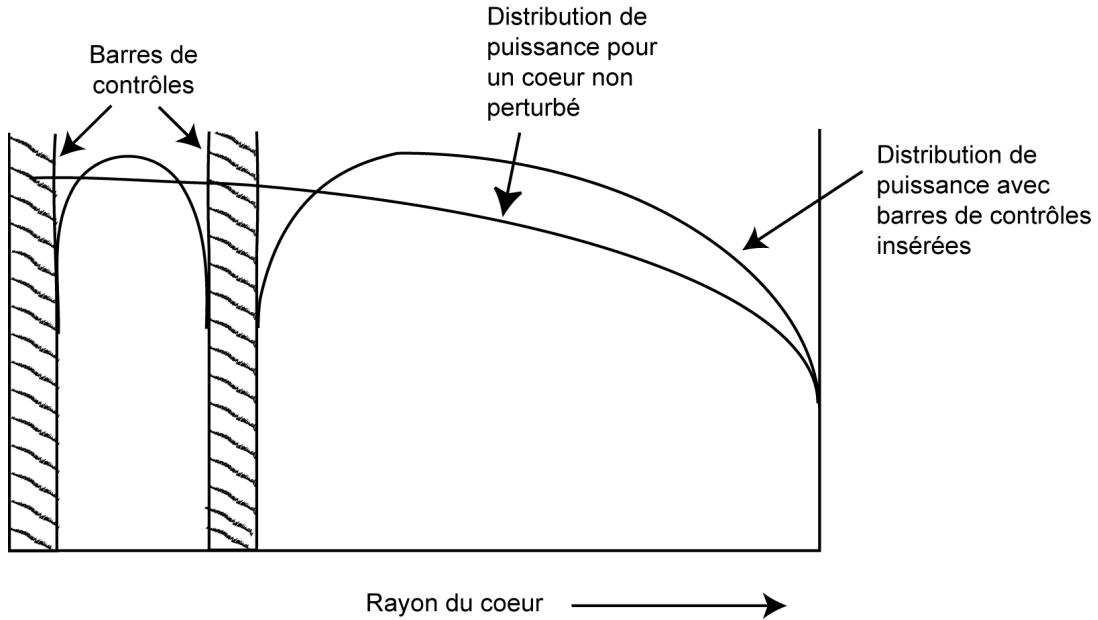


FIG. 1.11 – Profil de la distribution radiale de la puissance avec des barres de contrôles insérées (adaptée à partir de Toderas, 1990)

## 1.6 Profils de température

### 1.6.1 Profil axial de la température

La détermination des profils de la température dans le cœur du réacteur est aussi bien importante que les profils de puissance, sachant qu'il y'a une forte dépendance entre la puissance et la distribution de température dans le cœur. Pour les réacteurs thermiques ayant un enrichissement uniforme, le profil axial de la température suit approximativement celui du flux neutronique. Généralement, pour un écoulement simple phase, le flux neutronique peut être décrit par une fonction sinusoïdale :

$$q'''(z) \sim \cos\left(\frac{\pi z}{L_e}\right) \quad (1.34)$$

La figure (1.12) illustre une distribution axiale typique de la température dans un canal d'un REP. Il s'agit du profil axial de la température du combustible, de la gaine et du fluide réfrigérant. On remarque que la température du fluide réfrigérant augmente le long du canal. Toutefois, cette distribution varie avec le flux thermique linéaire dans le canal. Cependant la température de la gaine et par conséquent, du combustible dépend du pouvoir réfrigérant du fluide circulant entre les assemblages combustibles.

Puisque la température du réfrigérant augmente durant l'écoulement à travers le canal, la température de la gaine (évidemment du combustible) se trouve élevée dans la région supérieure du cœur par rapport à la région inférieure.

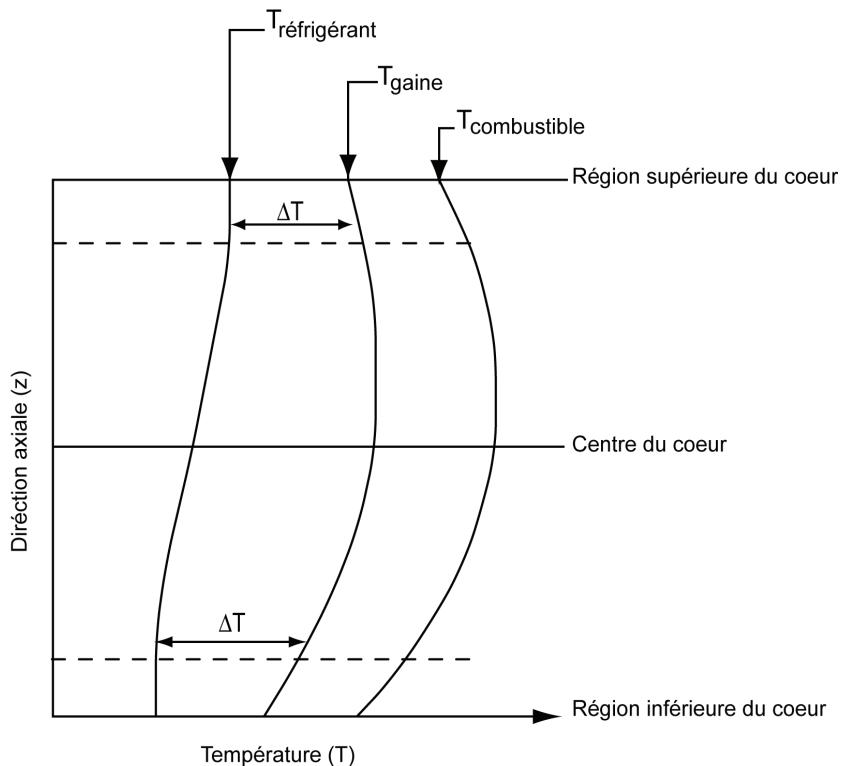


FIG. 1.12 – Profils de température dans un REP (adaptée à partir de DOE, 1992)

### 1.6.2 Distribution radiale de la température dans le combustible

La distribution radiale de la température dans le cœur du réacteur est la même que la distribution radiale de la puissance. Ceci est valable dans le cas où le débit massique est uniforme à travers le cœur entier du réacteur.

Les positions dans le cœur, avec le maximum de puissance produite, correspondent aux températures les plus élevées. La figure (1.13) illustre la distribution radiale de la température dans un élément combustible d'un canal autour duquel circule un fluide refroidisseur. La forme de base du profil radial de la température dépend principalement du coefficient de la conductivité thermique des différents matériaux constituant le combustible. Le gradient de température dans chaque matériau doit être suffisant pour qu'un transfert de chaleur soit mis en jeu.

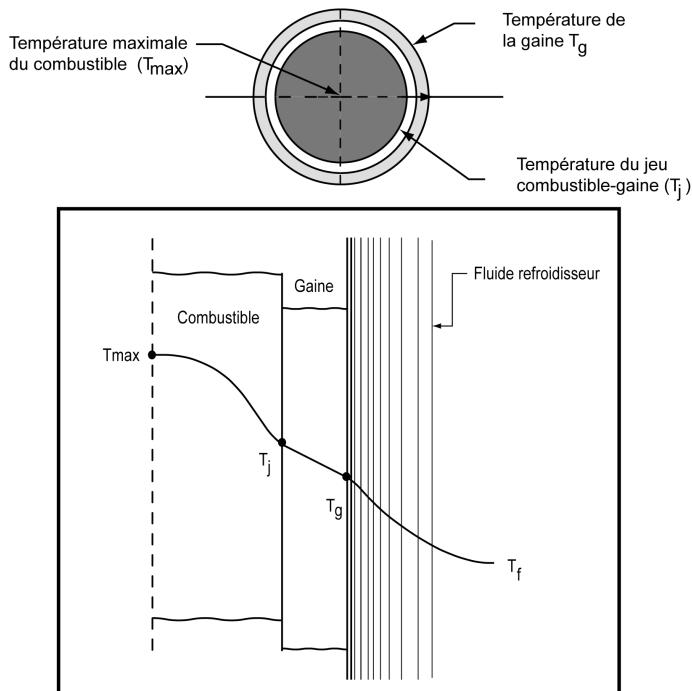


FIG. 1.13 – Distribution radiale de la température dans un élément combustible

## 1.7 Transfert de chaleur et paramètres de sûreté

### 1.7.1 Ecoulement simple phase liquide

Les études concernant le transfert de chaleur pour des écoulements monophasiques s'intéressent à la détermination du champ de température du fluide en écoulement dans les canaux du réacteur. L'objectif principal est de prévoir si la distribution de la température est inférieure aux limites de sûreté du réacteur. Dans ce contexte, il est indispensable de déterminer les paramètres gouvernant le transfert de chaleur entre les parois des piles à combustibles et le fluide réfrigérant.

Le calcul de la température du fluide implique la détermination du flux de chaleur  $\vec{q}''(W/m^2)$  sur la surface de la paroi externe de la pile à combustible est en contact avec le fluide. Ce flux est calculé à partir de la première loi de Fourier :

$$\vec{q}'' = -k \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n} \quad (1.35)$$

avec  $k$  est la conductivité thermique du fluide,  $\vec{n}$  est un vecteur unité perpendiculaire à la paroi et  $\frac{\partial T}{\partial n}$  est le gradient de température dans la direction du transfert de chaleur.

Cependant, la loi de Fourier est souvent exprimée en fonction du coefficient d'échange thermique par convection ( $h$ ) via la loi de Newton pour le transfert de chaleur :

$$\vec{q}'' = h(T_p - T_b) \quad (1.36)$$

avec  $T_p$  est la température de la paroi et  $T_b$  est la température caractéristique de l'écoulement ou température moyenne du fluide (bulk temperature).

### 1.7.2 Evaluation du coefficient de transfert de chaleur convectif

Dans la plus part des réacteurs de puissance, le fluide réfrigérant est forcé à circuler à travers le cœur du réacteur (utilisation d'une pompe par exemple), ce qui met en jeu un transfert de chaleur par convection forcée. Quant aux réacteurs où le mécanisme d'évacuation de la chaleur est basé sur la circulation naturelle du fluide réfrigérant, le transfert de chaleur par convection naturelle s'impose. Le coefficient ( $h$ ) dépend des propriétés du fluide réfrigérant, du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent, écoulement monophasique ou diphasique), de la vitesse de l'écoulement ainsi que de la géométrie des canaux dans le cœur du réacteur. Le coefficient ( $h$ ) est souvent représenté par une fonction semi-empirique qui dépend des conditions précédentes. Le tableau (1.1) résume quelques valeurs typiques du coefficient ( $h$ ) pour quelques régimes d'écoulements.

TAB. 1.1 – Quelques valeurs typiques du coefficient d'échange thermique par convection pour différents régimes d'écoulements (adapté à partir de El-Wakil, 1971)

Régime d'écoulement	Coefficient de transfert de chaleur ( $W/m^2K$ )
Convection naturelle	
Gaz sous basse pression	6-28
Liquides	60-600
Eau bouillante	60-12000
Convection forcée dans les tubes	
Gaz sous basse pression	6-100
Liquides	
Eau	250-12000
Sodium	2500-25000
Eau bouillante	2500-50000
Vapeur condensée	5000-100000

La différence entre ( $T_p$ ) et ( $T_b$ ) est obtenue en déterminant  $h$  à partir du nombre adimensionnel de NUSSELT. A partir de l'analyse dimensionnelle et de la théorie de

la similitude, les échanges thermiques peuvent être décrits par des corrélations liant le nombre de NUSSELT à d'autres nombres adimensionnels.

Pour un problème de convection forcée, le nombre de NUSSELT est fonction du nombre de REYNOLDS ( $\text{Re}$ ) et du nombre de PRANDTL ( $\text{Pr}$ ) :

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \mu_p/\mu_b) \quad (1.37)$$

avec :  $\text{Nu} = \frac{hD_e}{k}$ ,  $\text{Re} = \frac{\rho V D_e}{\mu}$  et  $\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{k}$

$D_e$  est une longueur caractéristique du problème et  $k$  est la conductivité thermique.

S'il s'agit d'un écoulement turbulent dans des canaux relativement longs, le nombre de NUSSELT est donné par l'équation suivante :

$$\text{Nu} = C \text{Re}^\alpha \text{Pr}^\beta \left( \frac{\mu_p}{\mu} \right)^\gamma \quad (1.38)$$

avec  $\mu_p$  et  $\mu$  est la viscosité du fluide pour  $T = T_p$  et  $T = T_b$  respectivement.

Les coefficients  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes qui dépendent de la géométrie des canaux.

#### ► Cas d'un tube circulaire de longueur L et de diamètre D

Dans ce cas, on distingue trois corrélations qui sont largement utilisées :

- La corrélation de Seider et Tate(Seider, 1936) :

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4} \left( \frac{\mu_p}{\mu} \right)^{0.14} \quad (1.39)$$

Cette équation est valide pour  $0.7 < \text{Pr} < 120$  ,  $\text{Re} > 10000$  et  $L/D > 60$

- La corrélation de Dittus-Boelter (Dittus, 1930) :

Pour des cas où  $\mu \approx \mu_p$ , les équations suivantes de Dittus-Boelter sont les plus utilisées :

Lorsque le liquide est chauffé on a :

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4} \quad (1.40)$$

Lorsque le liquide est refroidi on a :

$$\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.3} \quad (1.41)$$

Ces équations sont valides pour  $0.7 < \text{Pr} < 100$  ,  $\text{Re} > 10000$  et  $L/D > 60$

– La corrélation de Colburn (Colburn, 1933) :

Elle est valable pour les fluides ayant une viscosité élevée. Colburn a réduit l'équation de Dittus-Boelter en définissant la relation suivante :  $St \Pr^{2/3} = 0.023Re^{-0.2}$  avec  $St$  est le nombre de STANTON ( $St = Nu/Re \Pr$ ) . Ce qui est équivalent à l'équation suivante :

$$Nu = 0.023Re^{0.8}\Pr^{\frac{1}{3}} \quad (1.42)$$

Le domaine de validité de cette équation est le même que celui de la corrélation de Dittus-Boelter.

► **Cas d'une section non circulaire**

Dans ce cas, les mêmes corrélations utilisées dans le cas d'un tube circulaire restent valables pour les sections non circulaires (canaux carrés, rectangulaire, triangle équilatéral), à condition d'utiliser comme dimension caractéristique le diamètre hydraulique ( $D_h$ ) défini par :

$$D_h = \frac{4A_f}{P_m} \quad (1.43)$$

avec  $A_f$  est la section non circulaire du passage du fluide,  $P_m$  et le périmètre mouillé.

Pour un faisceau de barres combustibles formant par exemple un ensemble de canaux triangulaires,  $Nu$  varie considérablement par rapport au même nombre évalué pour des géométries circulaires.  $Nu$  et  $h$  dépendent de la position des barres dans le réseau. Dans ce cas illustré dans la figure (1.14) et pour  $P/D \geq 1.12$ ,  $Nu$  est celui calculé pour une section circulaire  $Nu_{s.c}$  multiplié par un facteur de correction  $\psi$  (Toderas, 1990) :

$$Nu = \psi (Nu_{s.c}) \quad (1.44)$$

Pour un réseau infini triangulaire et pour  $1.05 < P/D < 2.2$  , le facteur de correction est donné par :

$$\psi = 0.9217 + 0.1478P/D - 0.1130e^{-7(P/D-1)} \quad (1.45)$$

Markoczy (1972) a donné une expression générale de  $\psi$  valide pour chaque barre combustible ( $R$ ) dans un réseau, entourée par  $j$  sous-canaux (figure 1.15) :

$$\psi = 1 + 0.9120Re^{-0.1}\Pr^{0.4}(1 - 2.0043e^{-B}) \quad (1.46)$$

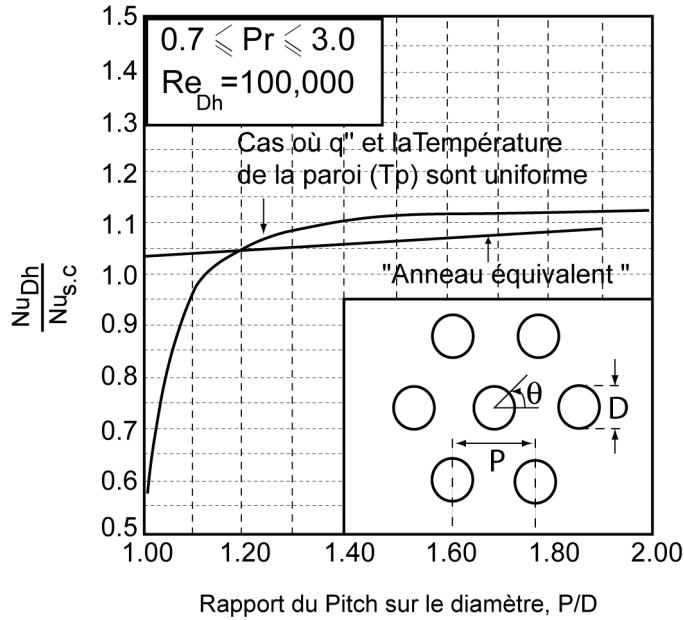


FIG. 1.14 – Rapport entre le nombre de NUSSELT calculé pour une section non circulaire ( $Nu_{D_h}$ ) et le nombre de NUSSELT pour une section circulaire ( $Nu_{s.c}$ ) en fonction de  $P/D$  (adaptée d'après Toderas, 1990)

Le nombre de REYNOLDS ( $Re$ ) est établi en utilisant le diamètre hydraulique ( $D_h$ ) donné, dans ce cas, par l'expression (1.48) ainsi que la vitesse caractéristique ou moyenne du fluide ( $T_b$ ) dans les sous-canaux entourant la barre de combustible ( $R$ ).

$$D_h = 4 \frac{\sum_{j=1}^J A_j}{\sum_{j=1}^J P_{mj}} \quad (1.47)$$

La valeur de  $B$  est donnée par :

$$B = \frac{4}{\pi} (P/D)^2 - 1 \quad (1.48)$$

En ce qui concerne les problèmes de convection naturelle, où le mouvement n'est dû qu'aux effets thermiques conjugués par des effets de gravités, le nombre de NUSSELT ne sera plus dépendant du nombre de REYNOLDS. Dans ce cas on a tendance à écrire le nombre de NUSSELT en fonction du nombre de PRANDTL, de GRASHOF ( $Gr$ ) ou bien de RAYLEIGH ( $Ra$ ).

$$Nu = f(Pr, Gr) \quad (1.49)$$

$$Nu = f(Pr, Ra) \quad (1.50)$$

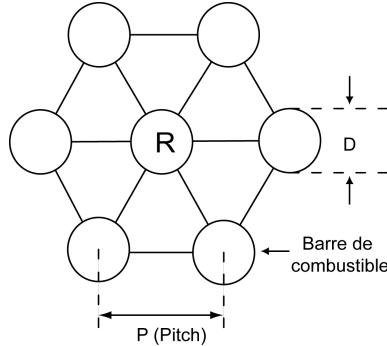


FIG. 1.15 – Réseau triangulaire de piles à combustibles

Les nombres de GRASHOF et de RAYLEIGH sont donnés par :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TD_e^3}{\nu^2} \quad \text{et} \quad Ra = \frac{g\beta\Delta TD_e^3}{\nu\alpha}$$

avec :

- $D_e$  représente une longueur de référence,
- $\nu$  est la viscosité cinétique du fluide ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ),
- et  $\alpha$  est le coefficient de diffusivité thermique du fluide ( $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ ).

En ce qui suit, nous nous limiterons, à expliciter quelques valeurs du nombre de NUS-SELT pour certains cas pratiques souvent rencontrés en physique des réacteurs nucléaires :

► **Cas d'un écoulement laminaire sur une plaque plane verticale de longueur  $L$**

McAdams (1949, 1954) propose une formule générale pour calculer le nombre de NUS-SELT moyen pour une plaque verticale plane de longueur  $L$  avec une température de paroi constante.

$$Nu_L = CRa_L^n \quad (1.51)$$

$n$  et  $C$  sont des constantes qui dépendent de la géométrie.

En régime laminaire, McAdams recommande la corrélation suivante :

$$Nu_L = CRa_L^{1/4} \quad \text{avec} \quad 10^4 < Ra_L < 10^9 \quad (1.52)$$

En régime turbulent, McAdams recommande la corrélation suivante :

$$Nu_L = CRa_L^{1/3} \quad \text{avec} \quad Ra_L > 10^9 \quad (1.53)$$

Churchill and Chu (1975) ont proposé les corrélations suivantes ( $0 < \text{Pr} < \infty$ ) :

Pour  $0 < \text{Ra}_L < 10^9$  :

$$\text{Nu}_L = 0.68 + 0.67\text{Ra}_L^{1/4} \left[ 1 + \left( \frac{0.492}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \right]^{-4/9} \quad (1.54)$$

Pour  $\text{Ra}_L > 10^9$  :

$$\text{Nu}_L^{1/2} = 0.825 + 0.387\text{Ra}_L^{1/6} \left[ 1 + \left( \frac{0.492}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \right]^{-8/27} \quad (1.55)$$

Également, Schmidt and Beckmann (1930) ont proposé les équations suivantes :

$$\text{Nu}(x) = 0.39(\text{Gr}_x \text{Pr})^{1/4} \quad (1.56)$$

$$\text{Nu}_L = 0.52(\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/4} \quad (1.57)$$

Par l'utilisation des méthodes d'approximations, Saunders (1939) and Schuh (Schuh, 1948, in Martynenko, 2005) ont obtenu des solutions pour divers nombres de PRANDTL. Ensuite, Ostrach (1953) a obtenu la dépendance suivante pour le nombre de NUSSELT local :

$$\text{Nu}_x = f(\text{Pr}) \left( \frac{\text{Gr}}{4} \right)^{1/4} \text{pour } 0.01 < \text{Pr} < 1000 \quad (1.58)$$

Le Fevre (Le Fevre, 1957, in Martynenko, 2005) a étudié les cas limites suivants :

Pour  $\text{Pr} \rightarrow 0$  :

$$\text{Nu}_L = 0.8\text{Gr}_L^{1/4}\text{Pr}^{1/2} \quad (1.59)$$

Pour  $\text{Pr} \rightarrow \infty$  :

$$\text{Nu}_L = 0.67\text{Gr}_L^{1/4}\text{Pr}^{1/2} \quad (1.60)$$

Eckert (Eckert, 1987, in Lienhard IV and Lienhard V, 2005) a utilisé la méthode intégrale en vue de déterminer  $h$  local sur une plaque plane isothermique pour un

écoulement laminaire en convection naturelle. Ces travaux ont abouti à la corrélation suivante :

$$\text{Nu}_x = 0.508 \text{Ra}_x^{1/4} \left( \frac{\text{Pr}}{0.952 + \text{Pr}} \right)^{1/4} \quad (1.61)$$

ou bien

$$\text{Nu}_L = 0.678 \text{Ra}_L^{1/4} \left( \frac{\text{Pr}}{0.952 + \text{Pr}} \right)^{1/4} \quad (1.62)$$

► **Cas d'un écoulement laminaire autour d'un cylindre verticale de longueur  $L$**

Le transfert de chaleur à partir de la paroi d'un cylindre vertical, est similaire à celui à partir d'une plaque verticale, à condition que l'épaisseur de la couche limite thermique ( $\delta t$ ) soit mince. Cependant, si la couche limite thermique est épaisse, comme le montre la figure (1.16), le transfert de chaleur dans ce cas augmente en fonction de la courbure de la couche limite. Cette correction a été, en premier lieu, considérée par Sparrow et Gregg (1959). Ensuite Cebeci (Cebeci, 1974, in Lienhard IV and Lienhard V, 2005) a amélioré cette étude en vue de déterminer, avec précision, les facteurs de corrections. La figure (1.17) présente, pour différentes valeurs de  $\text{Pr}$ , les corrections qui doivent être appliquées sur les résultats trouvés dans le cas d'une plaque plane verticale.

La figure (1.17a) montre les corrections qui doivent être multipliées par le nombre de NUSSELT pour une plaque plane verticale afin d'obtenir  $\text{Nu}$  dans le cas d'un cylindre vertical. D'après cette figure on remarque que le facteur de correction augmente lorsque  $\text{Gr}$  diminue. La figure (1.17b) illustre les mêmes corrections précédentes, mais dans le cas du calcul du nombre de NUSSELT moyen le long du cylindre vertical de longueur  $L$ .

Dans les deux situations, sauf pour les métaux liquides, la correction est inférieure à 10% si  $[(x \text{ ou } L)]/R < 0.08 \text{Gr}_x^{1/4} \text{ ou } L$  (Lienhard IV and Lienhard V, 2005).

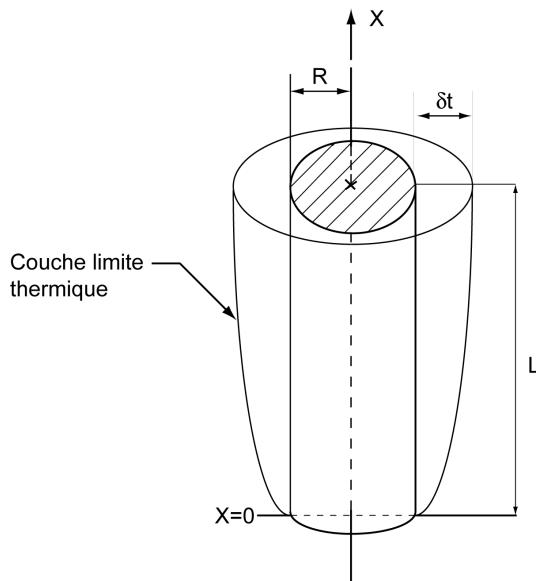


FIG. 1.16 – Couche limite développée autour d'un cylindre vertical (Lienhard IV and Lienhard V, 2005)

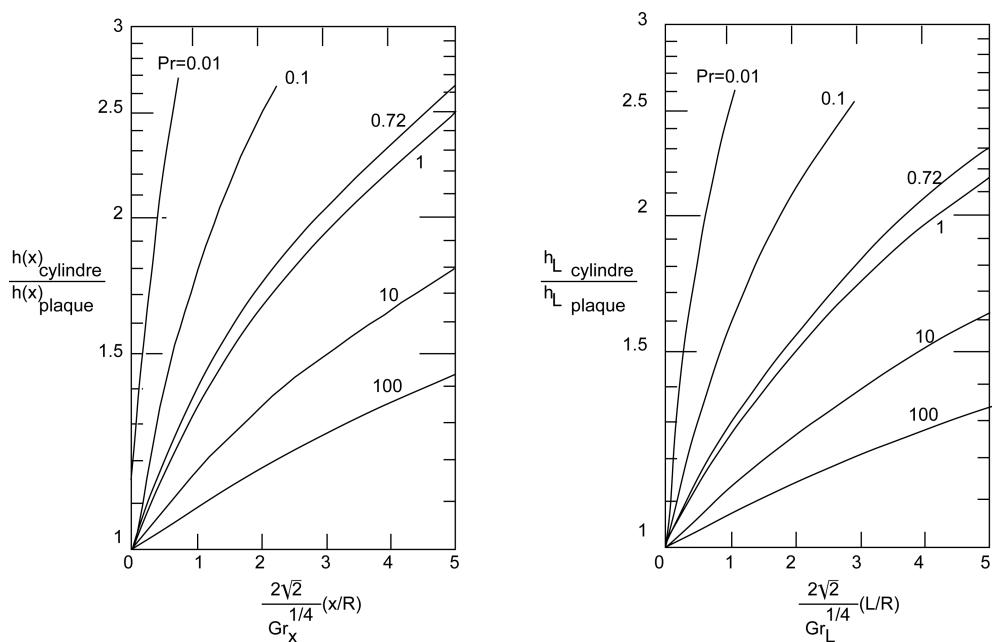


FIG. 1.17 – Les corrections qui doivent être appliquées sur  $h(x)$  (1.19a) et  $h_L$  (1.19b) dans le cas d'un cylindre vertical (Lienhard IV and Lienhard V, 2005)

### 1.7.3 Ecoulement diphasique (en ébullition)

La première détermination des régimes de transfert de chaleur en ébullition libre « pool boiling » a été réalisée par Nukiyama en 1934. La courbe de Nukiyama (figure 1.18) représente, en échelle logarithmique, la relation entre le flux de chaleur  $q''$  transmis par l'élément chauffant, et la différence de température entre la paroi de cet élément et la température caractéristique (ou moyenne) de l'eau ( $T_p - T_b$ ). Comme la température de l'eau reste constante lors de l'ébullition,  $T_b$  est remplacée par la température de saturation. Soit  $\Delta T_{sat} = T_p - T_{sat}$ . Ainsi, la température de l'eau qui engendre la source de chaleur prend la valeur de la température de saturation. La première région désignée par la zone

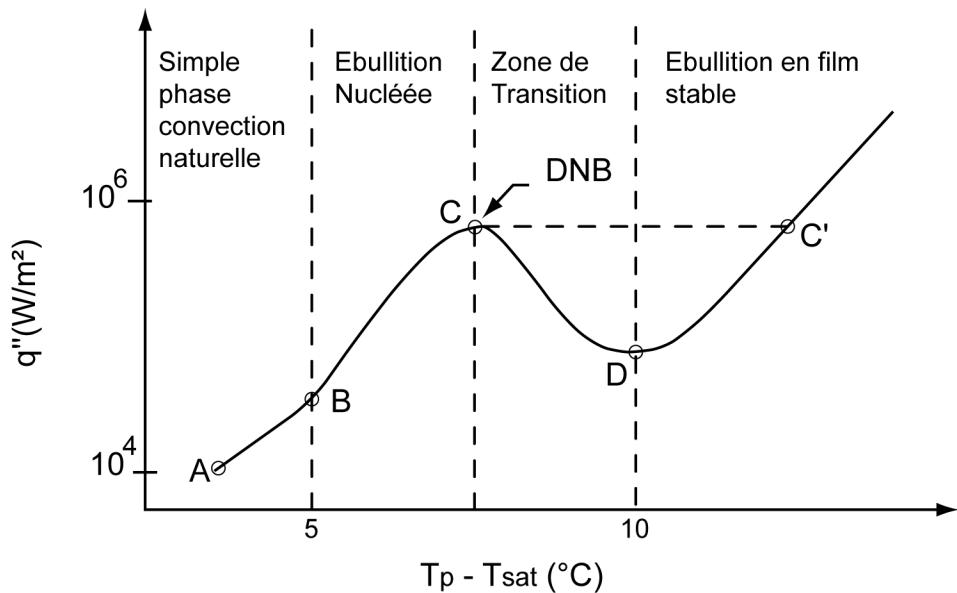


FIG. 1.18 – Courbe de Nukiyama

AB spécifie l'échange de chaleur simple phase liquide en convection naturelle. Dans cette zone, et malgré que la température de la paroi dépasse, de quelque degrés, la température de l'ébullition, aucune bulle de vapeur n'apparaît. L'échange de chaleur dans ces conditions obéit aux lois définies précédemment.

Cependant, au dessus du point C, le taux de nucléation est suffisamment élevé, ce qui conduit à l'isolation de la paroi par un film de vapeur continu. Ceci empêche l'irrigation de la surface de l'élément chauffant. Également, l'ébullition en film peut être établie à des faibles flux de chaleur si la température de la surface est suffisamment élevée (région C-D-C'). L'évacuation de la chaleur entre le point C et D se fait principalement sous forme de chaleur latente de vaporisation. L'accroissement du  $\Delta T_{sat}$  n'est plus accompagné d'un accroissement du flux de chaleur transmis, ce qui traduit la courbure de la zone C-D (Behar,

1993).

D'autre part, entre C et D la paroi est faiblement surchauffée et la formation du film est instable. Ainsi, cette région est souvent appelée région de transition d'ébullition (à partir de l'ébullition nucléée jusqu'à l'ébullition en film).

Le point C définit le flux maximal de l'ébullition nucléée (Critical Heat Flux « [CHF] ») ou point de Burn-out (Departure from Nucleate Boiling « [DNB] »). En ce point, le film de vapeur couvre complètement la paroi, ce qui empêche l'irrigation de la gaine du combustible par le réfrigérant. Dans ce cas, l'évacuation de la chaleur se fait principalement sous forme de chaleur latente de vaporisation. La température de la paroi (Gaine de l'élément combustible) va augmenter brutalement, jusqu'au point de fusion de la gaine. Ainsi, la première barrière de sûreté du réacteur sera détruite. Par conséquent, pour la sûreté des réacteurs nucléaires, la détermination du CHF et du DNB est indispensable pour garantir le non dépassement des limites de sûreté. Finalement, le point D correspond à la température minimale de l'ébullition en film.

La figure (1.19) illustre les différents régimes de transfert de chaleur en ébullition convective ainsi que les profiles de température du fluide réfrigérant et de la surface chauffante.

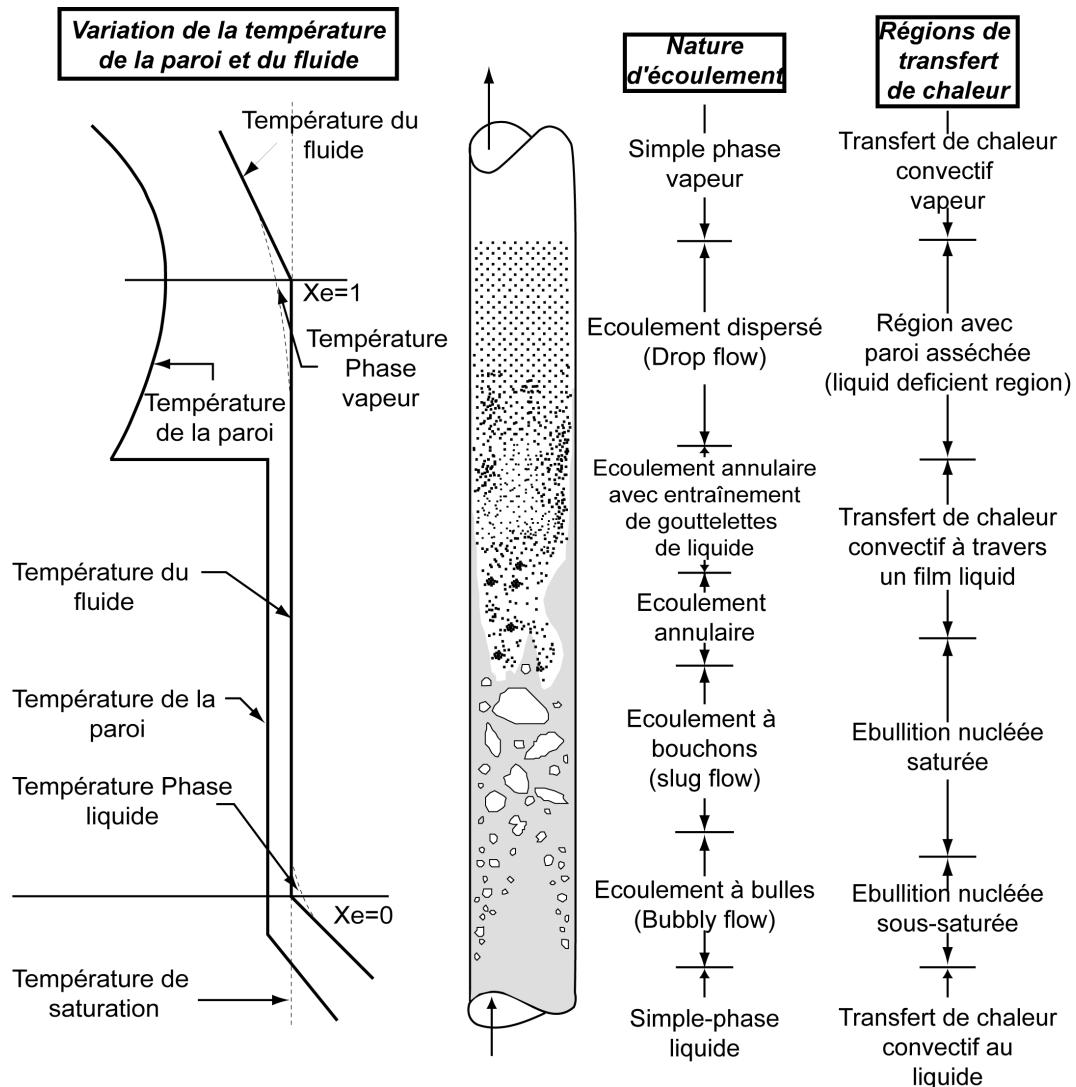


FIG. 1.19 – Les différentes régions de transfert de chaleur et natures d'écoulement convectif pour un écoulement en ébullition (modifiée à partir de Toderas, 1990)

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différentes équations de transport-diffusion qui permettent la détermination des paramètres décrivant l'état d'un fluide en mouvement. Également, nous avons explicité les principaux régimes d'écoulement et les différents phénomènes de transfert d'énergie se déroulant au sein des réacteurs nucléaires. Ces rappels présentés constituent les éléments de base d'une étude thermohydraulique des coeurs des réacteurs nucléaires. Dans ce travail, nous nous focalisons plutôt sur des réacteurs

de recherche refroidis par eau légère et dont le mécanisme de refroidissement est basé principalement sur la circulation naturelle de l'eau dans le cœur. Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude thermohydraulique du réacteur TRIGA MARK II, de puissance 2MW installé au Centre National d'Etudes Nucléaire de la Maâmora (CENM). Dans le deuxième chapitre, nous détaillerons la conception thermohydraulique ainsi que quelques limites de sûreté de ce réacteur.

## Chapitre 2

# Conception thermohydraulique et limites de sûreté du réacteur TRIGA du CENM

### 2.1 Introduction

Actuellement plusieurs unités de recherche, hôpitaux ainsi que des universités dans le monde sont équipés de réacteurs nucléaires de faible puissance connus par des *réacteurs de recherche*. Ils sont caractérisés par des marges de sécurité assez convenables pour être utilisés dans des milieux urbains. Ces réacteurs fournissent une source de neutrons qui permet aux scientifiques et aux ingénieurs d'effectuer des recherches fondamentales et appliquées. Dans la majorité des cas, ces recherches consistent à utiliser des faisceaux de neutrons pour mieux comprendre la structure des matériaux et mettre au point des matériaux avancés destinés pour des produits de consommation. Parmi les applications nous citons les radio-isotopes utilisés dans les diagnostics médicaux et la thérapie, ou destinés à des fins industrielles ou agricoles.

Un réacteur de recherche peut être considéré comme une maquette à échelle réduite des réacteurs de puissance orientés vers la production d'électricité. Il offre la possibilité de réaliser des essais de combustibles, des composants, des matériaux et des caloporteurs. Également, il joue un rôle vital dans la formation du personnel d'une centrale nucléaire. Il permet d'acquérir des connaissances fondamentales concernant la manipulation des réacteurs de grande puissance et de s'entraîner à affronter des scénarios dangereux et imprévisibles qui peuvent survenir en cas de dépassement des limites de sûreté. La plus part des cœur de ces réacteurs sont refroidis par la circulation naturelle du modérateur

---

entre les assemblages combustibles.

TRIGA (Training Research Isotope General Atomics) est l'un des classes des réacteurs de recherche les plus utilisés conçus par la société américaine General Atomics (GA). Ces réacteurs ont une gamme de puissance qui varie de quelques Kilowatts jusqu'à 16 MW. Le système de refroidissement du cœur d'un réacteur TRIGA est basé sur le phénomène de la convection naturelle. Ces réacteurs sont distribués dans plus d'une vingtaine de pays dans le monde, et ce, grâce à leurs sûretés intrinsèques et leurs encombrements très réduit. Le Maroc est l'un des pays qui sont dotés de cette filière de réacteurs ; il s'agit du réacteur TRIGA MARK II installé au Centre d'Etude Nucléaire de la Maâmora (CENM) qui fonctionne à une puissance de 2MW. Il est conçu de telle façon à pouvoir augmenter ultérieurement sa puissance à 3MW en passant vers un régime d'écoulement en convection forcée.

## 2.2 Conception mécanique du CENM-TRIGA MARK II

### 2.2.1 Description générale

Le cœur du réacteur TRIGA du CENM se situe à proximité du fond d'une cuve en aluminium remplie d'eau, de 2.44m de diamètre et d'environ 8.84m de profondeur et entourée d'une structure en béton armé (voir figure 2.1). Ce réacteur est équipé d'un réflecteur en graphite, de quatre canaux neutroniques et d'une colonne thermique. L'eau constitue un blindage adéquat au sommet de la cuve. Les mécanismes de commande des barres sont montés sur un pont construit sur la partie supérieure de la cuve.

Le réacteur est contrôlé et commandé par un système de contrôle-commande informatisé de pointe, avec écran graphique, auto-vérification, et enregistrement automatique des informations vitales. Le réacteur peut être actionné en mode stationnaire, soit par commande manuelle, soit par commande automatique. Le combustible du réacteur TRIGA se caractérise par sa sûreté intrinsèque, une rétention élevée des produits de fission, et une capacité éprouvée à résister aux trempes à l'eau sans aucune réaction adverse à des températures allant jusqu'à 1100°C.

L'expérience universellement acquise en matière d'exploitation des réacteurs TRIGA similaires, a prouvé la sûreté intrinsèque de ce type de réacteurs. Cette sûreté est due à l'important coefficient de température négatif instantané caractéristique des éléments

---

modérateur-combustible en alliage uranium-hydrure de Zirconium. Lorsque la température du combustible augmente, ce coefficient compense immédiatement les insertions de réactivité. Il en résulte un mécanisme où les excursions de puissance se terminent rapidement et en toute sécurité. Le cœur du réacteur se compose d'un réseau hexagonal

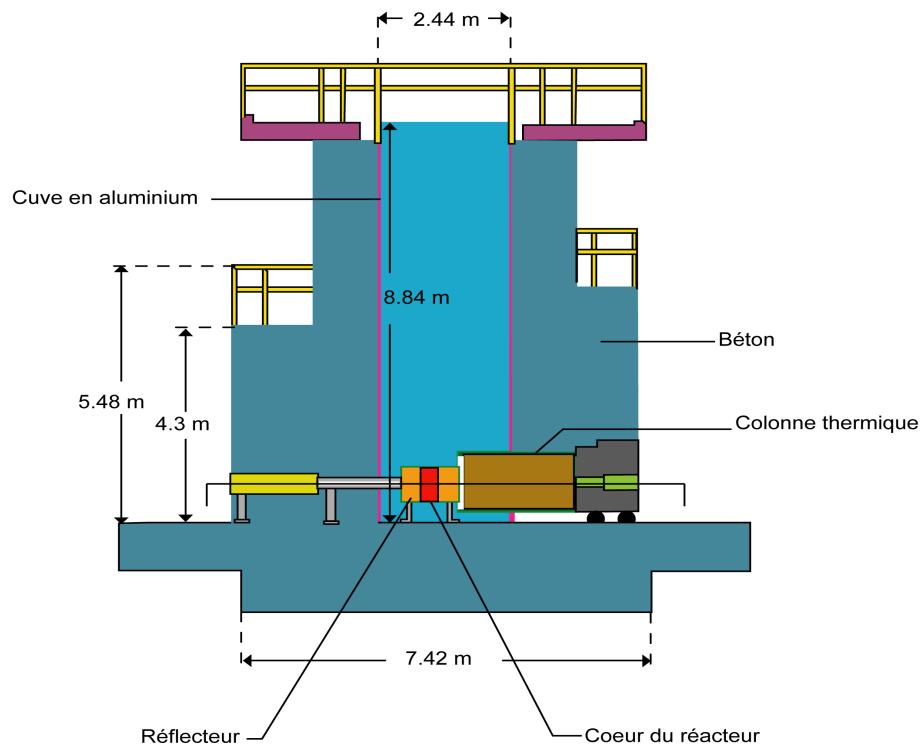


FIG. 2.1 – Schéma approximatif du réacteur TRIGA-CENM

de 121 emplacements dont 101 emplacements sont réservés au combustible : 94 éléments modérateurs-combustibles, 2 éléments combustibles instrumentés pour mesurer la température, cinq barres de contrôles avec prolongateurs combustibles. La figure (2.2) représente un arrangement typique des éléments constituant le cœur du réacteur TRIGA-CENM. En plus des deux emplacements occupés par la chaussette d'essai centrale et le terminus du système de transfert pneumatique, 18 emplacements comprennent des éléments en graphite.

## 2.2.2 Plaque supérieure et plaque inférieure

La plaque supérieure de diamètre d'environ 55.254 cm et de 3.175 cm d'épaisseur est constituée de l'aluminium. Elle permet de positionner de façon très précise les composants du cœur dans le sens latéral. La plaque est anodisée de façon à résister à l'usure et à la

corrosion. 121 trous, dont le diamètre est 3.82 cm, sont forés dans la plaque supérieure. De petits trous réalisés en diverses positions de la grille supérieure permettant d'insérer des tubes fins dans le cœur pour mesurer le flux, la température de l'eau de refroidissement, etc.

Il est possible de retirer une section hexagonale du centre de la plaque supérieure afin d'insérer des échantillons allant jusqu'à 11.2 cm de diamètre dans la zone de flux maximum.

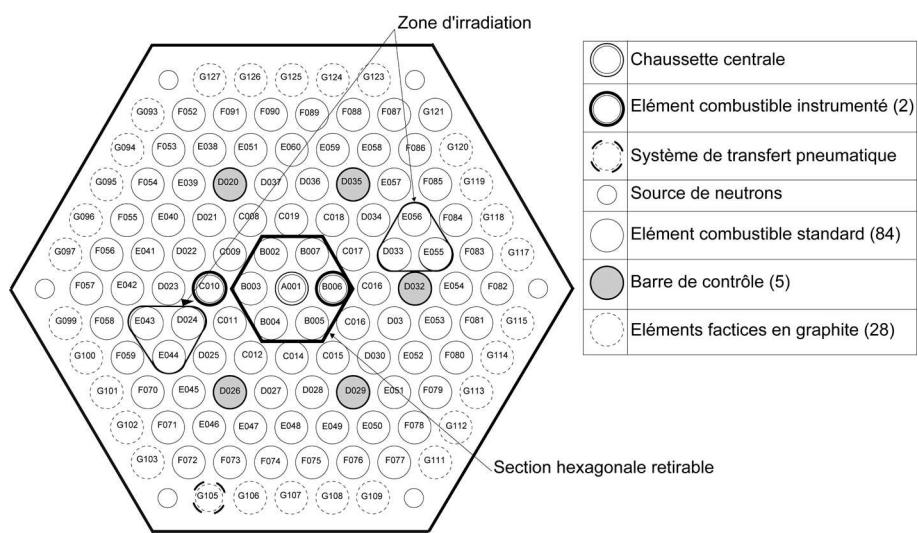


FIG. 2.2 – Arrangement typique des éléments combustibles

La plaque inférieure de forme hexagonale se compose d'une plaque en aluminium, de 3.175 cm d'épaisseur, qui supporte tout le poids du cœur et établit un espacement précis entre les éléments modérateur-combustible. Elle est attachée à la partie inférieure du réflecteur par six boulons de diamètre 0.925 cm en acier inoxydable. 109 trous de diamètre 3.175 cm de la plaque inférieure sont alignés avec les trous des éléments combustibles dans la plaque supérieure.

### 2.2.3 Plaque de sécurité

Cette plaque est destinée à assurer le maintien des barres de réglage au sein du cœur. Il s'agit d'une plaque en aluminium de 2.5 cm d'épaisseur, boulonnée à une virole qui est soudée au revêtement intérieur du réflecteur et placée à 41.1 cm en dessous de la partie supérieure de la plaque inférieure.

### 2.2.4 Matériaux du réacteur

Les matériaux utilisés dans le réacteur qui sont critiques de point de vue sûreté sont le combustible et sa gaine. La partie active de chaque élément modérateur-combustible, illustrée dans la figure (2.3), est d'environ 3.63 cm de diamètre sur 38.1 cm de long. Le combustible se compose d'un mélange solide et homogène d'un alliage uranium-hydrure de zirconium contenant environ 8.5% en poids d'uranium enrichi à 20%. Le rapport entre les atomes d'hydrogène et les atomes de zirconium est de l'ordre de 1.6. Pour faciliter l'hydruration, un petit trou est foré dans le centre de la section active du combustible et une barre de zirconium est insérée dans ce trou après la fin de l'hydruration.

Chaque élément est enveloppé par une gaine en acier inoxydable de 0.051cm d'épaisseur. Deux sections de graphite sont insérées dans la gaine, une au-dessus et une en dessous du combustible, afin de servir de réflecteurs inférieur et supérieur du cœur. Les embouts en acier inoxydable sont fixés aux deux extrémités de la gaine, de sorte que la longueur totale de l'élément combustible est d'environ 75.2 cm. L'embout inférieur soutient l'élément modérateur-combustible sur la plaque inférieure.

L'embout supérieur se compose d'une tige permettant de fixer l'outil de manutention du combustible ainsi qu'une pièce d'écartement triangulaire qui permet à l'eau de refroidissement de s'écouler via la plaque supérieur. Les matériaux utilisés dans les autres composants vitaux du réacteur sont illustrés dans le tableau (2.1).

TAB. 2.1 – Matériaux du réacteur TRIGA MARK II

<b>Composant</b>	<b>Matériel Cuve du réacteur</b>
Cuve du réacteur	Aluminium 6061-T6
Grille supérieure, inférieure et de sûreté	Aluminium 6061-T6
Tuyauterie convection naturelle	Aluminium 6061-T6
Canaux d'irradiation section intérieure	Aluminium 6061-T6
Canaux d'irradiation section extérieure	SS-18-8
Guide des barres de contrôle	Aluminium 6061-T6
Absorbant des barres de contrôles	B <sub>4</sub> C
Blindage du réacteur	Béton armé de haute densité

### 2.2.5 Barre de contrôle

Le contrôle du réacteur est assuré par l'intermédiaire de cinq barres absorbantes de neutrons. Ces barres contiennent un prolongateur combustible qui a les mêmes caracté-

ristiques d'un combustible TRIGA standard (figure 2.4), l'ensemble est gainé dans un tube en acier inoxydables SS-304 de longueur 109 cm et de diamètre 3.4 cm. La partie absorbante est constituée de 38.1cm de carbure de bore sous forme solide. Les parties inférieures et supérieures sont occupées d'un espace rempli d'air de 16.5 cm.

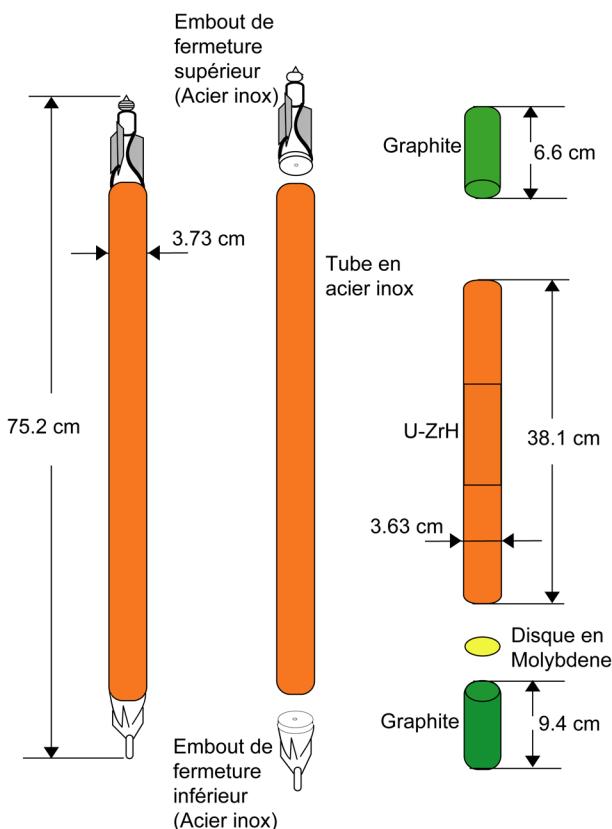


FIG. 2.3 – Assemblage élément combustible-gaine en acier inoxydable avec raccords en triflute

## 2.2.6 Éléments factices en graphite

Des éléments factices en graphite occupent les positions des grilles qui ne sont pas occupées par les éléments modérateurs-combustibles ou par d'autres composants du cœur. Ces éléments ont les mêmes dimensions que les éléments modérateurs-combustibles, mais ils sont complètement remplis du graphite. Ces éléments servent à diminuer le volume d'eau entre le cœur et le réflecteur en graphite afin de ne pas dégrader le flux de neutrons dans le réflecteur et dans le râtelier à échantillon rotatif ainsi que dans les tubes d'irradiation.

### 2.2.7 Assemblage réflecteur

Radialement, le graphite est d'une épaisseur d'environ 21 cm, d'un diamètre extérieur d'environ 94 cm, d'une hauteur d'environ 53 cm et son périmètre intérieur est de forme hexagonale avec une distance entre les faces d'environ 53 cm. Une couche de plomb de 6.3 cm d'épaisseur entoure le graphite pour réduire l'échauffement par rayon gamma du béton de protection. Le plomb ne recouvre pas l'ouverture des tubes d'irradiation. Le graphite et le plomb sont dans une enveloppe étanche en aluminium soudé.

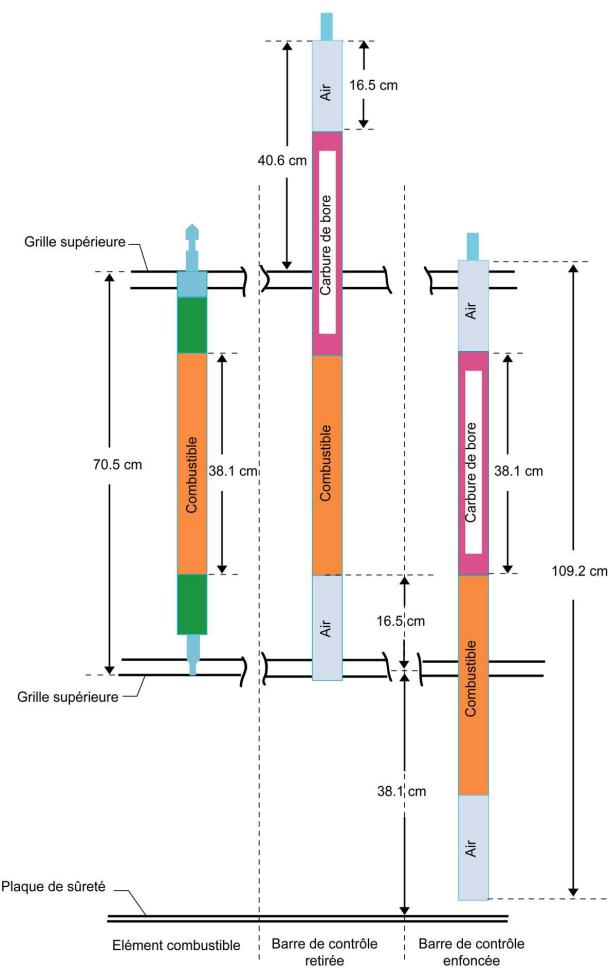


FIG. 2.4 – Barre de contrôle avec prolongateur

### 2.2.8 Source de neutrons

Une source de neutrons en américium beryllium de 2 à 3 Ci ( $5 \times 10^6$  n/sec) est utilisée pour le démarrage du réacteur. La matière nucléaire se trouve dans une double capsule en

acier inoxydable d'un diamètre de 1.3 cm et d'une longueur d'environ 15 cm. La source de neutrons est enfermée dans une porte source de forme cylindrique en aluminium. Cette porte source peut être installée dans des emplacements aménagés dans la grille supérieure.

Le tableau (2.2) résume quelques paramètres physiques et géométriques typiques du cœur du réacteur TRIGA MARK II.

TAB. 2.2 – Paramètres de conception principaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II

Niveau de puissance stationnaire	2MW
Types de combustible	TRIGA
Matériau modérateur-combustible	$U - ZrH_{1.6}$ (nominal)
Teneur en uranium	8.5 % ou 12 % en poids
Enrichissement de l'uranium	< 20 % $^{235}U$
Longueur du combustible	31.1 cm (partie active)
Diamètre du combustible	3.63 cm de diamètre extérieur
Matériau de gainage d'épaisseur	Acier inoxydable 304 de 0.051 cm
Chargement critique dans un réacteur froid non irradié	71 éléments 2.653 Kg $^{235}U$
Nombre d'éléments combustibles	101
Nombre de barres de réglage	5
Nombre de barres de pilotage	1
Nombre de barres de compensation	4
Refroidissement du réacteur	Convection naturelle de l'eau de la piscine
Température moyenne du combustible (2MW)	345°C
Température maximale de l'eau à l'entrée (2MW)	45°C
Température moyenne de l'eau à la sortie	79°C

## 2.3 Refroidissement du réacteur

A partir du fond du cœur, l'eau s'infiltra à travers les orifices de la grille inférieure, puis elle s'écoule à travers la partie non-chauffée (réflecteur en graphite inférieur), ensuite elle passe à travers la partie active du combustible, puis la zone supérieure (réflecteur en graphite supérieur) et finalement quitte le canal à travers les trous de la plaque supérieure. Dans les systèmes basés sur la circulation naturelle, comme dans le cas du réacteur TRIGA, le mécanisme de refroidissement est similaire à un effet de thermosiphon qui

s'établit naturellement par la circulation de l'eau de refroidissement entre les assemblages combustibles. En effet, le gradient de température résultant du flux de chaleur dans le cœur du réacteur induit la variation de la densité de l'eau. Les gradients de densité génèrent une force motrice qui fait circuler le fluide caloporteur du bas vers le haut, d'où le refroidissement du cœur par convection naturelle (figure 2.5).

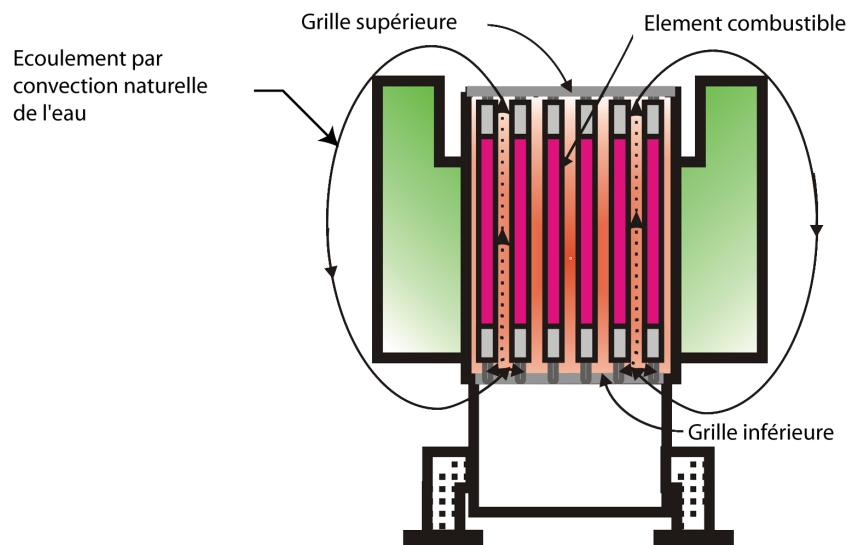


FIG. 2.5 – Convection naturelle dans le cœur du réacteur TRIGA

L'eau de la piscine où le cœur du réacteur est submergé, est refroidie à son tour au moyen d'un circuit de réfrigération comportant un échangeur de chaleur relié au circuit secondaire comprenant des réfrigérants atmosphériques. Un schéma descriptif du système de refroidissement du réacteur TRIGA est illustré sur la figure (2.6). Le circuit secondaire est équipé de détecteurs conçus pour mesurer l'activité de l'eau moyennant des prélèvements périodiques. Ce qui permet la détection de toute contamination éventuelle de l'eau secondaire.

Un système de mesure des températures et des pressions dans le circuit primaire est installé de façon à connaître les grandeurs physiques caractéristiques du refroidissement du réacteur. Ce qui permet le déclenchement des actions de sécurité si les limites admises sont atteintes.

Les conditions de refroidissement du cœur du réacteur sont telles qu'il ne puisse pas y avoir un assèchement des éléments combustibles pour les conditions de puissance et de débit correspondant aux limites de déclenchement des actions de sécurité.

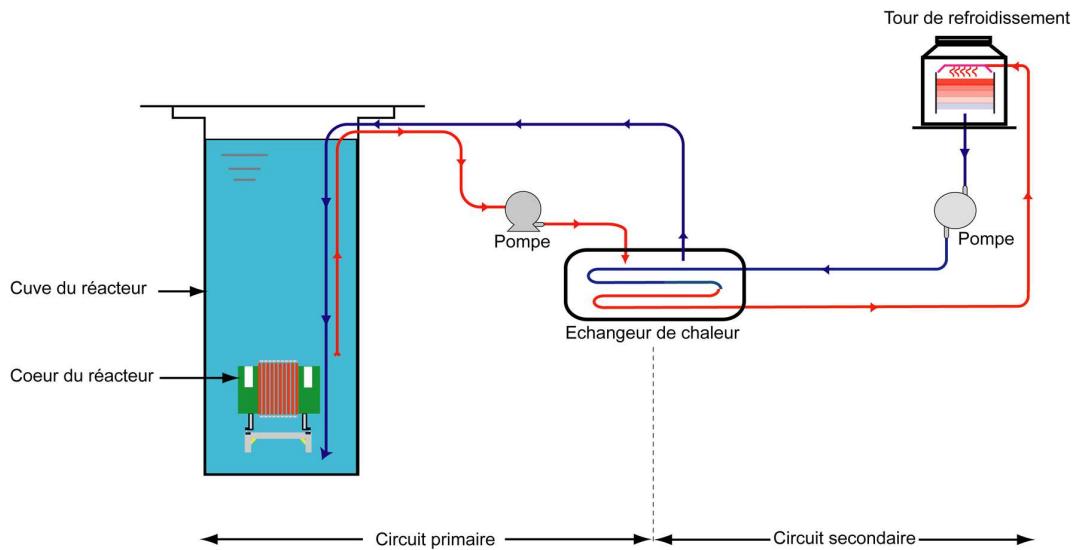


FIG. 2.6 – Boucles de refroidissement du réacteur TRIGA typique

## 2.4 Marges de sûreté du réacteur TRIGA

La Conception thermohydraulique du réacteur TRIGA doit assurer l'intégrité du combustible tant en régime stationnaire qu'en cas de conditions anormales imprévisibles. En régime stationnaire, l'intégrité peut être maintenue en limitant les niveaux de puissance du réacteur à des valeurs garantissant que la gaine du combustible peut transférer la chaleur du combustible au réfrigérant du réacteur, sans pour autant atteindre des températures (du combustible et de la gaine) susceptibles de provoquer la rupture de la gaine. En cas de dépassement des températures limites, le flux thermique local maximum dans le cœur serait supérieur au flux thermique provoquant un échauffement critique et, par conséquent, un effet de couverture pelliculaire (vapeur) enveloppant la gaine et empêchant son irrigation.

La température du combustible a une limite tant en régime stationnaire qu'en régime transitoire. Le combustible TRIGA est spécialement conçu pour fonctionner en mode impulsif. La limite de température découle du dégazage de l'hydrogène du combustible U-ZrH et de la contrainte qu'il crée dans le matériau de gainage des éléments combustibles. La résistance du matériau en fonction de la température établit la limite supérieure de la température du combustible. Les limites de température de 1150 °C (avec une température de gaine < 500 °C) et de 920 °C (avec une température de gaine > 500 °C) ont été établies dans le but d'éviter la perte d'intégrité de la gaine.

La température du combustible et la température de la gaine établissent la limite de

sûreté d'un réacteur. Ainsi, le niveau de puissance est soumis à une limite calculée de façon à garantir le non-dépassement de la température limite du combustible et celle de la gaine. L'analyse des bases de conception indique qu'un fonctionnement allant jusqu'à 2.2MW (avec un cœur à 101 éléments et une température d'entrée de l'eau de 45 °C) avec convection naturelle ne provoquera ni une ébullition pelliculaire ni, par conséquent, une augmentation de la température du combustible et de la gaine pouvant entraîner la perte d'intégrité de la gaine.

Il est possible de régler la température du combustible en imposant des limites à d'autres paramètres du système de sûreté présentant un certain intérêt comme le niveau de puissance stationnaire maximum admis, la température du combustible mesurée par le thermocouple et la température d'entrée du réfrigérant. Les consignes de sûreté, spécifiés au tableau (2.3), sont telles que les limites de sûreté indiquées dans les bases de calcul du réacteur ne seront en aucun cas dépassées soit en fonctionnement normal ou anormal de réacteur.

TAB. 2.3 – Réglages des paramètres de sûreté pour le réacteur TRIGA

Niveau de puissance stationnaire maximum	2200 kW(t) (Arrêt d'urgence)
Température maximale mesurée du combustible	750 °C (Arrêt d'urgence)

En général, les analyses thermohydrauliques permettent de déterminer les conditions et les paramètres de sûretés du réacteur pour assurer un fonctionnement sécurisé. En d'autre terme, elles permettent d'étudier la distribution de la température, de la pression et de la vitesse du réfrigérant. Ce dernier circule entre les assemblages combustibles afin de garantir le non dépassement de la température de la gaine et du combustible. Cette température peut entraîner l'apparition du phénomène de l'ébullition nucléée au point « ONB » (Onset of Nucleate Boiling), qui correspond au début de l'apparition des bulles de vapeur sur la gaine et par conséquent l'apparition des zones sèches (résistance thermique additionnelle) sur la paroi qui peuvent provoquer la fusion de la gaine.

Les analyses thermohydrauliques sont fréquemment menées sur les réacteurs de type TRIGA. Généralement, ces études sont conduites pour étudier le changement de la configuration du cœur du réacteur (passer d'une configuration avec uranium fortement enrichi (HEU) vers une configuration à uranium faiblement enrichi (LEU) ou l'inverse), le changement du combustible, ou pour conduire des expériences particulières dans le cœur.

Récemment, les objectifs fixés à travers les études menées sur TRIGA étaient orientés vers :

- La caractérisation de l'instabilité de l'écoulement en ébullition locale ou ébullition nucléée sous-saturée.
- La détermination des caractéristiques du réacteur TRIGA MARK II y compris les profils des flux de chaleur dans les éléments combustibles.
- L'étude des pertes de charges singulières dues au rétrécissement et à l'expansion de la section de passage de l'écoulement à travers les orifices de la plaque inférieure et supérieure.
- Expérience de couplage cinétique/thermohydraulique de TRIGA, et étude des paramètres de conception et de sûreté.

## 2.5 Codes de calcul thermohydraulique

La simulation numérique a une importance capitale en matière de prédition des marges de sûreté d'un réacteur nucléaire. Les codes de simulation numériques permettent de vérifier les différentes conditions de fonctionnements du réacteur, voir aussi le test des scénarios impossible à réaliser expérimentalement (rupture d'un circuit de refroidissement, modéliser des incidents ou des problèmes de contrôle des barres de commande).

A nos jours, la simulation numérique est devenue un outil très puissant qui a presque remplacé une dialectique théorie/expérience par un triptyque associant théorie et modélisation, simulation et vérification numérique, et validation expérimentale. Elle s'impose partout (science pure, ingénierie, économie, science sociale, etc.) ouvrant ainsi un horizon vaste et illimité à l'exploration de notre environnement et de l'univers. Donc une simulation parfaite peut sembler, à priori, présenter autant de promesses que de risques, ainsi que d'apporter plus d'informations qu'une expérience globale insuffisamment préparée ou difficilement reproductible, ne serait-ce qu'en raison de son coût.

Concrètement, la connaissance du processus physique ou de l'ensemble des processus étudiés est rassemblée dans un logiciel ou code de calcul numérique permettant de résoudre les équations des modèles préalablement établis. Tout simplement, l'action de simulation, reflète la réalisation des expérimentations sur un modèle, ou plus précisément, la reproduction artificielle d'un phénomène scientifique qu'on désire étudier, puis on observe le comportement de cette reproduction lorsqu'on fait varier les actions que l'on peut exercer sur celle-ci et en déduit ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues. Elle s'appuie sur des méthodes mathématiques et informatiques spécifiques.

---

En chaque point de l'objet considéré, plusieurs grandeurs physiques (vitesse, température, pression, etc.) décrivent l'état de l'évolution du système étudié. Celles-ci ne sont pas indépendantes, mais reliées et régies par des équations, généralement aux dérivées partielles. Ces équations constituent la traduction mathématique des lois de la physique qui modélisent le comportement de l'objet. Simuler l'état de ce dernier, c'est déterminer idéalement en tout point du domaine de calcul, les valeurs numériques de ces paramètres.

Durant les trois dernières décennies, plusieurs codes de calcul numérique ont été développés pour prévoir le comportement thermohydraulique des réacteurs nucléaires. Ils sont regroupés en plusieurs catégories qui diffèrent selon l'approche physique sur laquelle ils sont basés. Généralement, ces codes ont été spécialement conçus pour traiter les réacteurs de puissance (REP, REB, VVER, CANDU, etc). Concernant les codes destinés à l'analyse thermohydraulique des réacteurs de recherche, ils sont rarement mentionnés dans la littérature. On peut trouver des exemples de codes qui ne sont que des cas particulier basés sur des modèles simplifiés. Egalement, il existe des codes développés pour les réacteurs de puissances et qui ont été adaptés aux caractéristiques de fonctionnement des réacteurs de recherche.

Plusieurs approches et formulations sont utilisées pour modéliser la thermohydraulique des réacteurs nucléaires. Les plus connues sont : l'approche intégrale de paramètres localisés, l'approche « sous-canaux », l'approche « milieu poreux » et l'approche basée sur CFD (Computational Fluid Dynamics). Dans ce qui suit, nous présentons quelques types de codes thermohydrauliques appartenant à chaque approche ainsi que les codes qui ont été utilisés dans le cas des réacteurs TRIGA.

### 2.5.1 Les Codes Système (System Codes)

Les *Codes Système* (System Codes) sont basés sur l'approche intégrale de paramètres localisés. Cela signifie que l'application des compartiments sur le circuit primaire ou secondaire du réacteur conduit à un modèle thermohydraulique unidimensionnel. Le plus petit compartiment représente le cœur entier ou une grande partie du réacteur. En se basant sur cette approche, les équations du bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont appliquées et moyennées sur le compartiment. Ensuite, les paramètres thermohydrauliques sont obtenus sur chaque compartiment. Les *Codes Système* sont couramment utilisés dans le cas des LWR pour des études en régime transitoire et pour des analyses de sûreté. Parmi les *Codes Système* largement utilisés nous citons :

**RELAP5** (Reactor Excursion and Leak Analysis Program) : Le code RELAP5 a été

élaboré par « Idaho National Laboratory ». Il est conçu pour réaliser des études thermohydrauliques transitoires sur des réacteurs refroidis par eau légère. Une version de ce code, connue par Mod3 qui est basée sur le code RELAP5, a été utilisée par Jensen et Newell (1998) pour une analyse thermohydraulique du réacteur TRIGA installé à l'université de Chicago (McClellan Nuclear Radiation Center) afin d'augmenter la puissance du réacteur de 1MW à 2MW.

L'université d'Oregon State a récemment effectuée une analyse thermohydraulique détaillée complète dans le cadre du programme de la réduction de l'enrichissement du combustible des réacteurs de recherche. Dans ce contexte, une étude thermohydraulique a été réalisée par Marcum (2008) en utilisant le code RELAP5. Cette étude avait pour buts d'étudier, en régime stationnaire et transitoire, les débits massiques de l'écoulement en convection naturelle, de déterminer la température du réfrigérant et du combustible en fonction de la puissance du réacteur et ce pour les deux configurations HEU et LEU.

**CATHARE** : C'est un code développé par le CEA, EDF et FRAMATOME. Ce code simule tout le spectre des grandes aux petites brèches soit du circuit primaire, du circuit secondaire, ainsi que les transitoires d'exploitation. Il constitue un outil d'analyse de sûreté et de mise au point des procédures en situations accidentelles et postaccidentielles. CATHARE est un code à deux fluides et six équations. Les équations de masse, d'énergie et d'impulsion sont résolues sur un circuit modélisé par des éléments à une dimension (1-D), comme les conduites, ou des éléments 0-D (volumes). D'autres éléments ont été développés comme l'espace annulaire (2-D) ou la cuve (3-D) dans la dernière version de CATHARE (Eymard, 2004). Le code représente d'une manière réaliste l'ensemble des phénomènes physiques intervenant dans la thermohydraulique de l'accident.

**ATHLET** (Analysis of Thermal-Hydraulics of LEaks Transient) : Ce code a été développé par Gesellschaft für Reaktorsicherheit (GRS) pour l'analyse des fuites et des transitoires en régime de fonctionnement anormal dans les réacteurs à eau légère. Le concept du code ATHLET pour l'analyse des REP et des REB est décrit par Burwell et al (1989).

**CATHENA** : Il s'agit d'un code thermohydraulique développé par « Atomic Energy of Canada Limited (AECL), Whiteshell Laboratories (WL) ». Ce code a été élaboré principalement pour étudier et analyser des situations perturbées pour le réacteur CANDU. Le développement de CATHENA a commencé en 1985 à partir des codes thermohydrauliques basés sur des modèles thermohydrauliques à l'équilibre. Ensuite, le code a été amélioré pour tenir en compte des modèles thermohydrauliques en non-équilibre afin de représenter avec précision, les canaux combustibles du CANDU à des conditions d'écoulement diphasique stratifié prévues au cours de certains accidents de perte du liquide de refroidissement (loss-

---

of-coolant accidents (LOCA)). Le modèle thermohydraulique est constitué de 6 équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie ; trois équations pour chaque phase. Plus de détails sur ce code peuvent être trouvés dans (Hanna, 1998).

### 2.5.2 Codes basés sur l'approche sous-canaux

L'approche sous-canaux est largement utilisée pour une modélisation multicompartment de la thermohydraulique des réacteurs (Sha, 1980 ; Macdougall and Lillington, 1984 ; Rowe, 1973). Cette approche consiste à représenter le cœur du réacteur par des sous-assemblages combustibles. Ces derniers sont à leur tour représentés par des sous-canaux et des éléments combustibles. Les équations thermohydrauliques sont résolues au niveau de chaque sous-canal. Dans ce contexte, nous présentons, quelques codes basés sur l'approche sous-canaux et qui ont été conçus spécialement pour des réacteurs de recherche ou des codes développés principalement pour des réacteurs de puissance mais qui ont été adaptés aux conditions de fonctionnement des réacteurs de recherche.

**TRISTAN** : c'est un code thermohydraulique unidimensionnel développé à l'Institut Josef Stefan, Slovénie (Mele, 1992). Il permet de calculer les paramètres de l'écoulement dans un canal du cœur d'un réacteur refroidi par convection naturelle. Le code TRISTAN est conçu spécialement pour l'analyse thermohydraulique en régime stationnaire des réacteurs de recherche de type TRIGA de faible puissance (1-2MW) et dont les conditions de pression ne dépassent pas les 2 bars. Une étude paramétrique en régime stationnaire des performances thermiques du réacteur TRIGA MARK II installé à Ljubljana (Slovénie) a été conduite moyennant le code TRISTAN (Mele, 1993).

**NCTRIGA** : c'est un code unidimensionnel de simulation de transfert de chaleur. Il permet le calcul, en convection naturelle le long d'un canal isolé, de la distribution de température, du débit massique ainsi que la distribution de température dans le combustible et la gaine. Ce code est une version modifiée du code NACTON développé au laboratoire national d'Argonne aux Etats-Unis pour les réacteurs ayant un combustible de type TRIGA (Smith, 1992). La vérification du code NCTRIGA est effectuée en se basant sur les données de General Atomics (GA). Quelques résultats de cette vérification sont présentés dans le tableau (2.4). Les résultats de vérification montrent qu'on peut utiliser le code NCTRIGA pour obtenir des flux de masse ainsi que des températures de sortie raisonnables pour des réacteurs TRIGA de puissance variant de 1MW jusqu'à 2MW. Le code NCTRIGA a été également utilisé pour analyser plusieurs réacteurs de type TRIGA. Huda (2006) a utilisé ce code pour l'étude des paramètres thermohydrauliques en convection naturelle du cœur du réacteur TRIGA MARK II installé à Savar,

Dhaka (Bangladesh).

TAB. 2.4 – Comparaison entre les résultats de simulation du code NCTRIGA et les résultats expérimentaux

Puissance (MW)	Nombre d'éléments	Source	Débit (Kg/sec)	Erreur (%)	Température de sortie °C	Erreur (%)
1.0	91	GA	8457	-7.0	70.2	-10.0
		NCTRIGA	7890		67.2	
1.5	91	GA	9555	-3.2	76.6	-2.6
		NCTRIGA	9259		75.6	
2.0	101	GA	11080	-0.3	86.1	-14.0
		NCTRIGA	11051		80.1	

**COOLOD-N2** : Il s'agit d'un code développé par l'institut de recherche atomique et énergétique au Japon (JAERI). Basé sur sa première version COOLOD (Kaminaga, 1990 ; Watanabe, 1984), COOLOD-N (Kaminaga, 1987) est destiné principalement pour l'analyse thermohydraulique en régime stationnaire et en convection naturelle des réacteurs de recherche dont les éléments combustibles sont de types plaques. A partir du code COOLOD-N, le code COOLOD-N2 (Kaminaga, 1994) a été développé en vue de tenir en considération la simulation thermohydraulique d'un cœur de réacteur de recherche constitué des éléments combustibles cylindriques. COOLOD-N2 est capable de calculer la distribution de la température du combustible en convection naturelle et forcée. Le code est équipé d'un « package de transfert de chaleur (Sudo, 1985) » offrant la possibilité de calculer le coefficient de transfert de chaleur et le flux critique. Egalement le code COOLOD-N2 a été utilisé pour l'analyse thermohydraulique du cœur du réacteur JRR-4 TRIGA-16 (Kaminaga, 1994).

**COBRA** (Coolant Boiling in Rod Array) : C'est un code développé par les chercheurs de « Battelle NW, Nuclear Regulatory Commission » aux Etats Unis. Il est basé sur l'approche sous-canaux et permet de calculer la distribution de température et des flux massiques dans les coeurs des réacteurs nucléaires de puissance. La caractéristique principale du code COBRA c'est qu'il tient en considération les échanges tridimensionnels de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre les canaux du réacteur ainsi que de l'écoulement diphasique. Il est largement utilisé dans l'analyse du déclenchement du phénomène de crise d'ébullition pour les LWR, ainsi que pour la modélisation en 3-D des REP soit pour un canal isolé ou bien pour plusieurs canaux du cœur du réacteur (Wheeler, 1976). La chronologie du développement de la série des codes COBRA commença par l'élaboration du code COBRA-I (Rowe, 1967) avec le déploiement de l'un des premiers

model décrivant les échanges de masse latéraux.

Vers 1971, Rowe (1971) publia la première version COBRA III, considérée comme étant la version de base des codes COBRA développés jusqu'à présent. Ensuite, il a développé COBRA IIIC (Rowe, 1973), une version représentative des codes sous-canaux traditionnels. Dans cette version, les trois équations de conservation de masse, de quantité de mouvement axiale, et d'énergie sont établies, sur chaque sous-canal, suivant la direction axiale de l'écoulement. Le couplage entre les canaux adjacents est traité par l'utilisation de la notion du flux de masse transversal pénétrant la surface fictive de contact entre les sous-canaux. Mathématiquement cela est traduit par une équation de quantité de mouvement transversale. Cette équation permet de déterminer le flux massique latéral à partir de la différence de pression entre les sous-canaux adjacents.

En 1977, apparut COBRA IV (Stewart, 1977) avec une amélioration considérable au niveau des techniques numériques facilitant la résolution des équations thermohydrauliques et qui ont permis de réaliser des études en régime transitoire ainsi que d'analyser d'autres scénarios possibles comme des accidents.

Le code COBRA-IIIC a été utilisé dans l'analyse thermohydraulique du réacteur TRIGA du « Penn State Breazeale Reactor (PSBR) » réalisée par Madeline Anne Feltus et William Scott Miller (2000). Ce code a été utilisé spécialement pour déterminer le niveau de la modélisation thermohydraulique nécessaire pour décrire précisément le comportement thermohydraulique de base du cœur du PSBR-TRIGA durant les conditions transitoires.

**PANTERA-1P** : C'est un code basé sur l'approche sous-canaux développé par Veloso (Veloso, MA, 2006). Ce code est une version modifiée du code COBRA-IIIC. Il est élaboré au centre de développement et de technologie nucléaire (CDTN) à Belo Horizonte, State of Minas Gerais, Brésil. PANTERA-1P a été principalement conçu pour simuler l'écoulement du fluide entre les éléments combustibles des réacteurs nucléaires en régime de convection forcée. Ensuite, il a été adapté aux conditions d'un écoulement en convection naturelle. Il est utilisé pour la simulation du comportement thermohydraulique de l'IPR-R1 (TRIGA MARK I) fonctionnant à une puissance nominale de 250kW.

**PARET** : c'est un code thermohydraulique développé en 1969 par Obenchain (1969) dans « Idaho National Engineering Laboratory » aux Etats-Unis. Il est conçu pour réaliser des expériences de mesures de température et de pression dans les réacteurs nucléaires de puissance. Par la suite, plusieurs modifications et améliorations ont été apportées à ce code comme l'introduction des corrélations permettant de calculer les instabilités des flux de masse et de chaleur, le CHF, le mode de transfert de chaleur pour les écoulements

monophasique, etc. Le code PARET a été utilisé pour des études thermohydrauliques sur différents réacteurs de recherche. Parmi eux figure les réacteurs de type TRIGA. Huda (2004) a utilisé le code PARET pour étudier les paramètres thermohydrauliques essentiels ainsi que les paramètres de sûreté du réacteur TRIGA MARK II de puissance 3MW installé et opéré à Savar, Dhaka, Bangladesh. Le principal but de l'étude était de déterminer le point de la crise d'ébullition dans le canal le plus chaud du réacteur.

**FLICA-4** : C'est un code thermohydraulique développé par le CEA. Il est conçu pour modéliser en 3-D, en régime stationnaire ou transitoire, les écoulements diphasiques dans les réacteurs nucléaires. Allaire (1995) présente une description détaillée du code FLICA. Une étude thermohydraulique a été réalisée par Erradi et al. (2001), moyennant le code FLICA, en vu de déterminer les limites de sûreté du réacteur de recherche Marocain TRIGA MARK II. Les résultats de simulation obtenus restent insuffisants puisque, d'une part, le code FLICA a été élaboré essentiellement pour les REP, et d'autre part, il n'a pas été adapté aux conditions de fonctionnements du réacteur (circulation naturelle de l'eau dans le cœur).

**STAFAS** (Sub-channel Thermal-Hydraulics Analysis of Fuel Assembly under Supercritical conditions). C'est un code développé par Cheng et al (2003). Il est basé sur le même principe que le code COBRA. La première version du code permet de modéliser les conditions de fonctionnement en régime stationnaire et des écoulements monophasiques. De nouvelles caractéristiques ont été ajoutées au code STAFAS pour tenir compte des propriétés de HPLWR (High-Performance Light-Water Reactor) tels que la simulation de l'écoulement du caloporteur, en parallèle avec les assemblages combustibles, mais du haut du cœur du réacteur vers le bas, ainsi que la disponibilité des bases de données concernant la vapeur d'eau qui permettent de déterminer les propriétés de l'eau dans des conditions supercritique de pression (Waata, 2006).

**THERMIT** (Kelly, 1981) : Ce code est basé sur six équations de conservation et deux modèles de fluide en conjonction avec une méthode numérique semi-implicite qui permet de prédire et d'analyser des écoulements compliqués dans des conditions de non-équilibre. Grâce à son complexe modèle à deux dimensions, le code fournit de plus amples renseignements concernant des écoulements diphasiques dans un réseau d'éléments combustibles.

### 2.5.3 Codes basés sur la formulation milieu poreux

La formulation « milieu poreux » comme elle est implémentée dans plusieurs codes thermohydrauliques, est basée sur le concept d'un milieu poreux caractérisé par une poro-

sité, une perméabilité surfacique, une résistance distribuée et une source de chaleur distribuée. Cette approche offre une gamme très vaste d'application et apporte une amélioration notable concernant la précision des calculs en comparaison avec les codes « sous-canaux ».

Le code **COMMIX-1** (COMponent MIXing) est l'un des codes thermohydrauliques connu par l'utilisation de l'approche « milieu poreux » (Sha, 1978). Il est conçu spécialement pour l'analyse thermohydraulique des écoulements monophasiques transitoires en 3-D des réacteurs refroidis par le sodium « liquid-sodium LMFBR ». Il est basé sur la résolution de l'équation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie pour une large gamme de géométries compliquées et des conditions d'exploitations variantes. Une version plus récente du code COMMIX a été développée ; il s'agit du code COMMIX-1A (Domanus, 1978). Des améliorations considérables ont été implémentées dans cette version par rapport à la version originale concernant la modélisation physique et la performance du calcul numérique.

#### 2.5.4 Les codes CFD

l'utilisation de CFD dans ce type de problème, consiste à résoudre localement les équations de la thermohydraulique couplées aux modèles de turbulence, de condensation, de combustion, etc. CFD utilise généralement la méthode de volume de contrôle. Elle consiste à remplacer le domaine continu par un domaine discret en utilisant un maillage. La géométrie d'un problème donné est caractérisée par des mailles typiques de petites tailles (triangle, rectangle, etc) dans lesquelles les paramètres thermohydrauliques sont calculés. Ces codes permettent de modéliser n'importe quel type de géométrie quelque soit le degré de complexité. Mais son inconvénient majeur réside dans le coût en temps de calcul. Ce qui fait de la simulation des problèmes ayant des géométries compliquées, une procédure très lente et inefficace. Parmi les codes basés sur cette technique nous citons le code FLUENT (FLUENT, 2005) et les codes CFX (CFX-4, 1997).

## 2.6 Couplage neutronique-thermohydraulique

Les codes thermohydrauliques que nous avons cités précédemment, nécessitent comme données essentielles la distribution de la puissance thermique dans le cœur du réacteur. Pour prévoir la distribution de la puissance générée par chaque élément combustible, un calcul neutronique est indispensable.

---

La neutronique est un domaine prépondérant de la physique des réacteurs puisqu'elle regroupe l'ensemble des études portant sur le cheminement des neutrons dans la matière. Elle s'intéresse à l'étude d'une population de neutrons dans un milieu défini par ses caractéristiques physiques et ses conditions aux limites. La mise en équation de ce problème est connue puisque l'on peut assimiler cette population de neutrons à un fluide gazeux qui est régi par l'équation de transport connue par l'équation de Boltzmann (Reuss, 2003 ; Ligou, 1997) ou l'équation de diffusion (forme réduite de l'équation de Boltzmann). La répartition du flux neutroniques, est la solution de cette équation. Elle est fonction des variables spatiotemporelles, de la vitesse et de la direction du neutron. Elle est calculée à partir des caractéristiques physiques de la matière, vis-à-vis des neutrons, appelées sections efficaces. Celles-ci représentent la probabilité pour qu'une particule (neutron par exemple) ait une réaction avec un noyau. A partir du flux neutronique, nous pouvons déterminer le flux de chaleur dans le combustible et, par conséquence, la distribution de la puissance. Ainsi, les résultats issus d'un calcul neutronique sont utilisés comme données dans les codes thermohydrauliques.

Généralement, le couplage est fortement demandé dans le cas des réacteurs de puissance comme les REB, les REP, les VVER, HPLWR, SCWR (SuperCritical Water Reactor), etc. Dans ces réacteurs, dont la majorité sont refroidis par eau légère, la distribution de la densité de l'eau dans le cœur est directement liée au taux de modération, et par conséquence au spectre de neutrons responsable de la distribution de l'énergie de fission dans le cœur. Donc, vu la forte influence de la puissance sur le gradient de la densité du réfrigérant, le couplage neutronique/thermohydraulique s'impose comme une nécessité primordiale afin de tenir en compte une analyse thermohydraulique détaillée.

Dans la littérature, on trouve plusieurs codes neutroniques qui peuvent être couplés aux codes thermohydrauliques. Deux méthodes de base sur lesquelles sont basés ces codes. Il s'agit d'une méthode statistique et d'une méthode déterministe :

La méthode statistique permet de simuler l'évolution d'une population de neutrons en faisant des tirages aléatoires selon des lois de probabilité. Cette méthode, qui résout de façon implicite l'équation de transport, utilise peu de modèles numériques ou physiques ce qui la rend relativement précise. Cependant, les temps de calcul sont aujourd'hui encore trop importants pour réaliser tous les calculs dans le cœur entier. En effet, le calcul du cœur par cette méthode est envisageable pour des situations bien définies. Parmi les codes les plus connus qui utilisent la méthode de Monte Carlo nous trouvons le code MCNP développé à Los Alamos aux États-Unis (MCNP, 2003) et le code TRIPOLI4 (Both, 2003) développé au CEA (France).

---

Quant à la méthode déterministe, elle est généralement basée sur les méthodes de coordonnées discrètes. La méthode déterministe permet de résoudre d'une façon explicite l'équation du transport par discréttisation numérique des différentes variables qui interviennent dans l'équation de Boltzmann. En ce qui concerne la discréttisation énergétique, elle est effectuée en général à partir de la théorie multigroupe. Celle-ci consiste à diviser le domaine d'énergie à des intervalles appelés groupes d'énergies, dans lesquels les grandeurs physiques (par exemple, le flux, le courant, les sections efficaces) sont considérées comme constantes. La méthode déterministe, étant beaucoup plus rapide que la méthode statistique, se prête également mieux au traitement de l'évolution du combustible au cours du temps. Parmi les codes basés sur la méthode déterministe nous citons le code DORT qui est un code 2-D, TORT, un code tridimensionnel, DORT-TD qui est un code qui résout l'équation de transport de neutrons en régime transitoire. La figure (2.7) illustre le principe de couplage neutronique/thermohydraulique et les données essentielles échangées entre les deux codes.

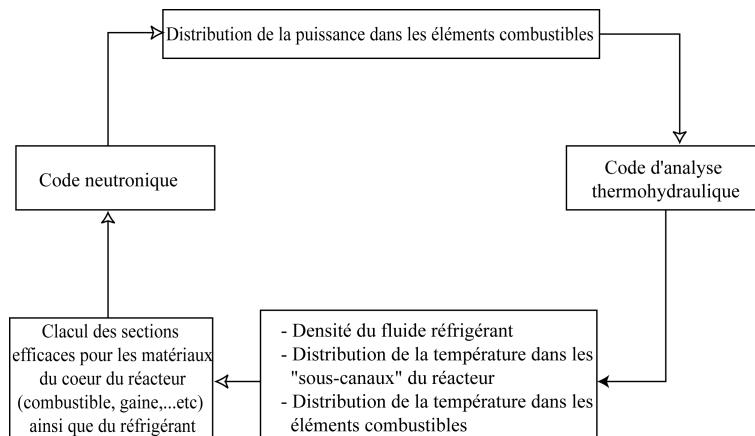


FIG. 2.7 – Un schéma de couplage neutronique/thermohydraulique

Jusqu'aujourd'hui, très peu d'études ont été réalisées dans le but d'établir un couplage neutronique (ou cinétique)/thermohydraulique pour les réacteurs de type TRIGA. Parmi les travaux rares effectués dans ce contexte, nous trouvons l'étude réalisée par Feltus (2000) sur le réacteur TRIGA de PSBR concernant le couplage cinétique/thermohydraulique. Il s'agit du couplage du code cinétique STAR et le code thermohydraulique COBRA en régime permanent et transitoire. L'une des raisons possibles, que nous croyons être raisonnable, qui n'encourage pas les thermohydrauliciens à réaliser le couplage neutronique/thermohydraulique dans le cas des réacteurs TRIGA, c'est que la majorité de ces réacteurs sont refroidis par eau légère en régime de convection naturelle et fonctionnent à faible puissance. Donc, la variation des propriétés physiques de l'eau, soumise à des pressions atmosphériques, n'est pas assez remarquable pour qu'un couplage neutro-

nique/thermohydraulique soit une nécessité primordiale, hormis dans des conditions de fonctionnement en régime impulsional du réacteur.

En outre, dans la majorité des études thermohydrauliques réalisées sur les réacteurs TRIGA, particulièrement en régime permanent, où la densité de puissance dans le cœur du réacteur est constante, la distribution de la puissance axiale dans les éléments combustibles est prise comme étant une fonction ayant un profil de forme sinusoïdale. Ainsi, le facteur de puissance axiale (APF) « Axial Power Factor » peut être représenté par des corrélations obtenues soit par l'expérience ou d'après des calculs neutroniques. Dans la littérature, on trouve quelques unes qui ont été utilisées dans des analyses thermohydrauliques pour les réacteurs de type TRIGA.

La corrélation suivante a été utilisée pour le calcul de la distribution axiale de puissance dans l'étude thermohydraulique du réacteur TRIGA de la Romanie de puissance 14MW (Kaminaga, 1990).

$$APF(z) = 1.35(1 + 1.275e^{-39.96(1-Z)}) \cos(1.325Z) \quad (2.1)$$

avec  $Z = (1 - 2z/L)$ ,  $z$  est la position axiale suivant la direction axiale de l'élément combustible et  $L$  est la longueur totale de l'élément combustible. Le facteur 1.35 représente le maximum de la distribution APF. Dans cette corrélation, la partie supérieure et inférieure en graphite de l'élément combustible a été prise en considération.

De la même façon Veloso, M.A.F (2004) a procédé pour le calcul de la distribution axiale de puissance, afin de l'intégrer dans le code PANTERA-1P.

$$APF(z) = 1.25\cos [3.6997(z/L) - 1.8498] \quad (2.2)$$

Cette corrélation, ne tient pas en compte de la partie supérieure et inférieure en graphite de l'élément combustible.

Quant à la distribution radiale de la puissance dans le cœur du réacteur, elle est utilisée normalement pour localiser le canal le plus chaud du réacteur. L'étude thermohydraulique de ce canal permet de prévoir le comportement thermohydraulique entier du réacteur lorsqu'on procède à un calcul simplifié du cœur (Huda, 2006 ; Merroun, 2007).

Pour le calcul du transfert thermique dans les piles à combustibles, même si la distribution radiale de puissance au sein du combustible peut être calculée par un code neutronique, cette distribution est prise, généralement, constante suivant une direction radiale (Veloso, M.A.F, 2004 ; Huda, 2006 ; Mele, 1992, Veloso, M.A, 2006) puisque le thermicien, dans ce cas, tente d'envisager la température au centre du combustible où elle devrait être maximale.

---

Du point de vu thermohydraulique, différents problèmes se posent ; toutefois, l'objectif principal est le même : satisfaire au refroidissement du cœur, tout en assurant l'extraction d'un maximum de chaleur. Le défi majeur consiste à savoir si le refroidissement par convection naturelle du réfrigérant est suffisant pour permettre l'évacuation de la chaleur résiduelle du cœur. Les niveaux de flux thermique à évacuer sont estimés à l'ordre du  $\text{MW/m}^2$  à une pression atmosphérique. Le refroidissement va donc être envisagé dans des conditions diphasiques. Par conséquent, la principale limitation proviendra essentiellement du risque d'apparition de la crise d'ébullition dite aussi flux critique. Elle est la conséquence de l'assèchement de la paroi, qui n'étant plus mouillée voit sa température croître très rapidement avec le risque de dépasser sa température de fusion. La connaissance précise des conditions dans lesquelles peut apparaître la crise d'ébullition est nécessaire.

A ce stade, l'étude thermohydraulique du cœur du réacteur s'impose fortement. Nous avons mentionné précédemment que quelques études ont été réalisées dans ce contexte. Nous rappelons ici l'étude réalisée par Erradi (2001) en utilisant le code FLICA. Ce travail offre juste la possibilité d'avoir des prévisions sur quelques paramètres de sûreté tel que le CHF et le DNB. L'inconvénient majeur de l'utilisation du code FLICA dans cette étude réside dans le fait que ce code n'a pas été conçu pour traiter le refroidissement du cœur en régime de convection naturelle. Egalement, c'est le problème majeur qui persiste dans le cas de l'utilisation des codes thermohydrauliques déjà disponibles comme COBRA et RELAP, bien qu'ils soient très puissants, l'utilisation de ces codes dans le cas d'un réacteur TRIGA nécessite plusieurs adaptations et modifications qui restent très prohibitifs et difficiles à réaliser dans la pratique. Ces modifications peuvent concerner plusieurs aspects tels que les configurations géométriques, les modèles physiques de base ainsi que la modélisation des éléments combustibles afin de tenir en compte les propriétés thermiques du combustible U-ZrH. Donc, l'idée de développer un code thermohydraulique propre au réacteur TRIGA MARK II du Maroc reste une alternative intéressante. Le facteur essentiel soutenant ce concept, c'est que divers pays qui sont dotés de cette catégorie de réacteurs TRIGA ont largement investi dans le développement de leurs propres codes simulant la thermohydraulique de ces réacteurs. Toutes ces circonstances nous ont poussées vers le développement d'un code de calcul thermohydraulique spécifique au réacteur TRIGA du Maroc.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit brièvement quelques caractéristiques physiques et géométriques du réacteur TRIGA MARK II installé au Centre d'Etude Nucléaire de la Maâmora (CENM). Egalemente, nous avons mis le point sur le système de refroidissement du cœur du réacteur à travers la circulation naturelle de l'eau réfrigérante entre les éléments combustibles ainsi que sur les limites thermiques de sûreté propre au réacteur déterminées par le constructeur Général Atomics. D'autre part, nous avons explicité les différents codes de simulation numérique utilisés dans les analyses thermohydrauliques détaillées des cœurs des réacteurs nucléaires. A travers les discussions menées dans ce chapitre, nous avons précisé les différentes circonstances qui nous ont poussées vers le développement d'un code de calcul thermohydraulique spécifique au réacteur TRIGA du Maroc.

Dans le chapitre 3, nous décrivons en détails, le modèle mathématique élaboré pour simuler l'écoulement du fluide réfrigérant dans le cœur du réacteur TRIGA MARK II du Maroc.

# Chapitre 3

## Développement du modèle thermohydraulique

### 3.1 Introduction

Les phénomènes de transfert de masse et d'énergie au sein des réacteurs nucléaires sont très compliqués à cause du fort couplage existant entre les différents paramètres thermiques et hydrauliques. En plus, le degré de complexité se mesure en fonction du régime d'écoulement mis en jeu dans le processus de refroidissement du réacteur. La traduction mathématique de ces phénomènes, aboutit à des équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant le comportement thermohydraulique du cœur du réacteur. Il s'agit, comme nous l'avons explicité dans le premier chapitre, de l'équation de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Ces équations, couplées avec le modèle thermique décrivant le transfert de chaleur dans les piles à combustibles, conduisent à un système complet d'équations thermohydrauliques. En résolvant ces équations, nous pouvons obtenir les différentes variables de l'écoulement ainsi que la distribution des températures dans le cœur.

La conception géométrique des réacteurs nucléaires est caractérisée, généralement, par sa complexité. La majorité des cœur de ces réacteurs sont constitués d'un arrangement triangulaire, hexagonal ou rectangulaire de grappe d'assemblages « Rod Bundles », souvent de géométrie cylindrique. Le refroidissement du cœur se fait soit par le contact direct du réfrigérant avec les piles, ou bien sa circulation dans des tuyauteries spirales « wire wrap » entourant ces piles. Donc, vu le couplage entre les différents phénomènes physiques, et la complexité géométrique de ce genre de problème, une étude thermohydraulique dé-

---

taillée s'avère très difficile, sinon impossible, si nous n'admettons pas des approximations (physiques et géométriques) pouvant faciliter relativement la modélisation.

## 3.2 Approche « sous-canaux »

Durant les trois dernières décennies, plusieurs approches ont été utilisées en vu d'établir et de prévoir le comportement thermohydraulique du réfrigérant. Parmi ces approches, figure l'analyse par sous-canaux (sub-channel analysis) (Rowe, 1973 ; Hirao, 1974 ; Sha, 1980 ; Macdougall, 1984). Cette approche est largement utilisée dans les études de sûreté grâce à sa précision et sa simplicité par rapport aux autres approches, ainsi que sa capacité de modélisation tridimensionnelle.

L'analyse par Sous-Canaux constitue un cas particulier de l'approche intégrale de paramètres localisés. Elle consiste à subdiviser le cœur du réacteur en plusieurs canaux verticaux et parallèles appelés sous-canaux (SC). Chaque sous-canal est délimité par la surface extérieure des piles à combustibles en contacte desquelles le réfrigérant circule axialement. Les SC ainsi définis, sont ouverts latéralement. Ceci induit un échange de masse et d'énergie entre eux (suivant la direction transversale). Cette approche facilite la modélisation des échanges intercanal dus aux écoulements croisés dirigés (directed cross flows), ce qui permet une modélisation tridimensionnelle de l'écoulement au sein du réacteur.

Explicitement, l'approche SC assume que l'une des trois composantes de la vitesse est dominante. Par exemple, pour un écoulement parallèle aux tiges combustibles, les composantes de la vitesse suivant l'axe  $x$  et  $y$  ( $v_x$  et  $v_y$ ) sont négligées devant la composante axiale ( $v_z$ ) (l'axe  $z$  étant la verticale). Cette approximation permet le découplage des vitesses et par conséquent, le découplage entre l'équation de quantité de mouvement axiale et transversale. Ceci simplifie énormément, du point de vue physique et calcul numérique, le traitement de l'équation de la quantité de mouvement suivant la direction transversale, permettant ainsi d'apporter plusieurs simplifications à cette équation (Sha, 1980).

La figure (3.1) présente quelques arrangements typiques de sous-canaux. D'après cette figure, on distingue trois principaux types de sous-canaux. Il s'agit d'un sous-canal central, un sous-canal latéral, et un sous-canal de coin. Un sous-canal central est généralement entouré par d'autres SC qui lui sont adjacents. Le choix de l'utilisation de ces différents types de SC dépend du degré de précision exigé par l'étude thermohydraulique désirée, ainsi que de la géométrie du cœur du réacteur.

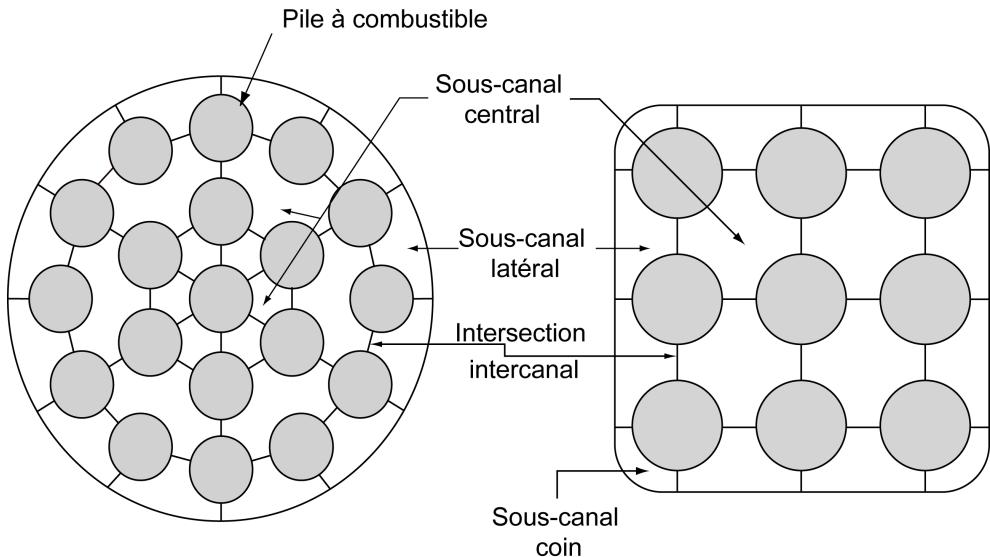


FIG. 3.1 – Quelques arrangements typiques de sous-canaux

### 3.2.1 Paramètres géométriques et thermohydrauliques d'un sous-canal

Le cœur du réacteur peut être représenté par différentes configurations géométriques de sous-canaux. La connaissance des données géométriques précises du réacteur (diamètre et longueur des piles à combustibles, pitch, etc.) est indispensable pour déterminer les différents paramètres thermohydrauliques de chaque sous-canal. Il s'agit de la section de passage du fluide réfrigérant, du diamètre hydraulique et du périmètre mouillé.

Souvent, il est préférable d'utiliser des SC triangulaires (figure 3.2), particulièrement au/ou près du centre du cœur d'un réacteur, où le flux thermique est élevé. Ceci à pour but d'augmenter la précision de calcul dans des zones où le gradient des propriétés du fluide réfrigérant est plus important.

L'équation (3.1) définit la section de passage de l'écoulement à travers un sous-canal triangulaire :

$$A_{sc} = \frac{\sqrt{3}}{4} P^2 - \frac{\pi D^2}{8} \quad (3.1)$$

avec  $P$  est le pitch (distance séparent le centre de deux éléments combustibles),  $D$  est le diamètre de la pile à combustible.

Le périmètre mouillé ( $P_m$ ) d'un sous-canal est défini par :

$$P_m = \frac{\pi D}{2} \quad (3.2)$$

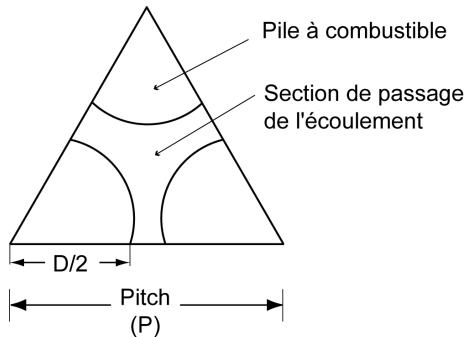


FIG. 3.2 – Schéma d'un sous-canal de géométrie triangulaire

Le diamètre hydraulique ( $D_h$ ) d'un sous-canal est donné par :

$$D_h = \frac{4A_{sc}}{P_m} \quad (3.3)$$

Plus de détails concernant le calcul des paramètres thermohydrauliques pour quelques types de SC, par l'utilisation de la géométrie analytique, sont disponibles dans les références suivantes : Veloso, MAF. (2004) et Toderas (1990).

### 3.2.2 Discrétisation des sous-canaux en volumes de contrôles

Chaque sous-canal, de longueur ( $L$ ), du cœur du réacteur, est subdivisé axialement par des plans normaux à la gaine des piles à combustibles. La zone, de longueur  $\Delta z$ , définie par ces plans, par les parois des piles à combustibles, ou par la surface extérieure du réseau (pour un sous-canal latéral ou du coin), constitue ce que l'on appelle un volume de contrôle (VC) (voir figure 3.3). Sur chaque volume de contrôle, les principes de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont appliqués.

### 3.2.3 Propriétés de l'écoulement dans un sous-canal

L'approche sous-canaux apporte autant de simplifications que possible, en vue de faciliter la résolution des équations de conservation sur un VC, toute en gardant le réalisme du problème et la précision des résultats de simulation.

Dorénavant, le développement des équations thermohydrauliques est effectué en se basant sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

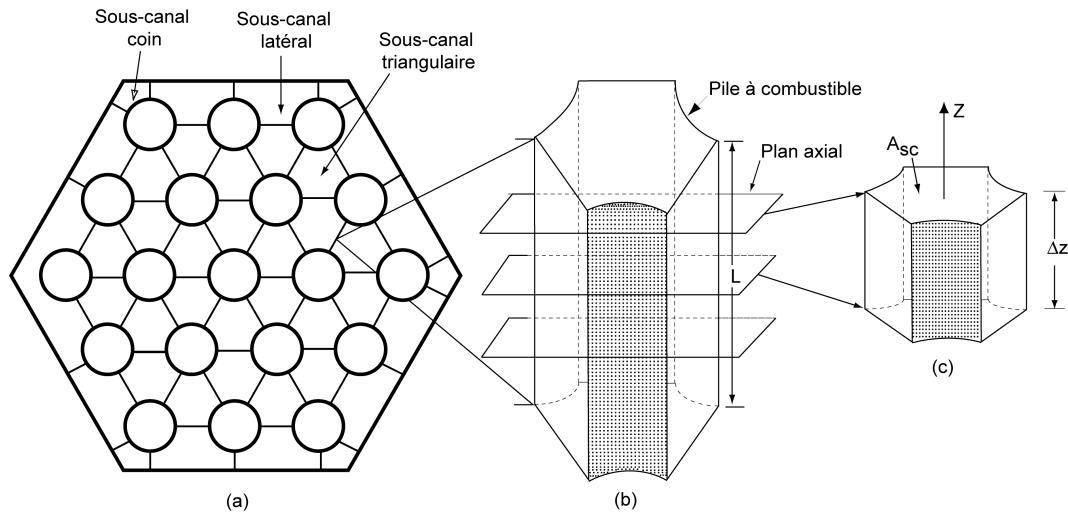


FIG. 3.3 – (a) Réseau hexagonal de sous-canaux, (b) sous-canal triangulaire, (c) volume de contrôle d'un sous-canal

- Dans un sous-canal donné, l'écoulement du fluide est unidirectionnel (du bas en haut) et parallèle aux éléments combustibles. Cela signifie que, dans le sous-canal considéré, les variables de l'écoulement ne dépendent que de la coordonnée longitudinale  $z$ .
- Les paramètres thermohydrauliques tels que la pression ( $P$ ), la température ( $T$ ) et la vitesse axiale ( $v_z$ ) sont considérés comme étant des paramètres localisés calculés au centre du VC. D'autre part, les vitesses transversales, notées  $w$ , sont calculées sur les interfaces fictives séparant les sous-canaux adjacents  $k$  (figure 3.4).

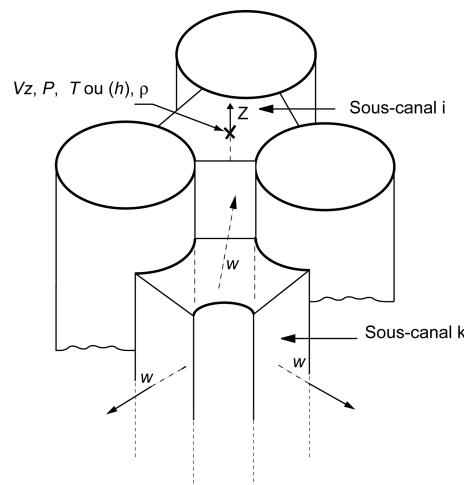


FIG. 3.4 – Localisation des différents paramètres thermohydrauliques

- Les sous-canaux sont couplés par deux types de mélange :
  - (i) Un mélange transverse dû aux tourbillons (vortices) résultant de la redistribution du flux de masse à cause du gradient de pression entre les SC.
  - (ii) Un mélange transverse turbulent et aléatoire qui ne provoque aucune redistribution du flux de masse dans le cas d'un écoulement monophasique.
- Régime permanent.
- Le fluide est incompressible :

$$\rho = \rho(T) \quad (3.4)$$

- La seule force externe qui agit sur le mouvement du fluide est la force gravitationnelle.
- Les forces de viscosité dans le fluide réfrigérant sont négligées. Les forces de frottement visqueux considérées sont celles qui se manifestent entre le fluide et la paroi de la gaine. Ceci implique que les différents paramètres de l'écoulement (pression, vitesse et température) sont considérés uniformes sur une section droite de l'écoulement. La figure (3.5) illustre l'effet de la viscosité sur la variation du champ de vitesse dans un sous canal.

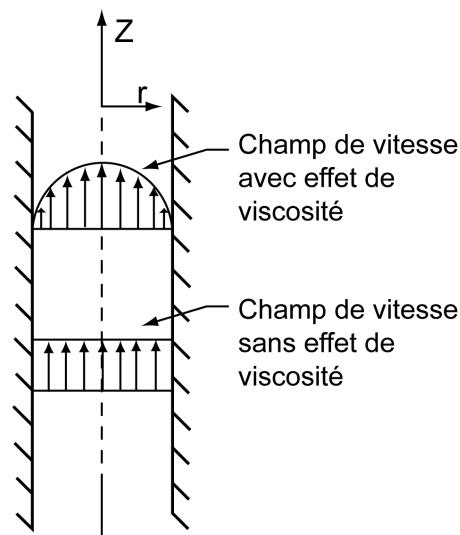


FIG. 3.5 – Effet de viscosité sur le champ de vitesse dans un sous canal

### 3.3 Développement du modèle thermohydraulique (1-D)

Nous avons mentionné, à plusieurs reprises, que la détermination des paramètres thermohydrauliques du fluide réfrigérant dans le cœur du réacteur, nécessite la résolution des équations gouvernantes du problème. Nous rappelons que les paramètres thermohydrauliques essentiels du problème sont le débit massique traversant axialement et latéralement les sous-canaux, la distribution de la pression, ainsi que la température du réfrigérant et du combustible. En se basant sur l'approche SC, les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont appliqués à chaque volume de contrôle d'un sous-canal.

Afin de minimiser les difficultés liées au développement du modèle, nous avons divisé la procédure du développement en deux étapes :

- La première, est consacrée à la modélisation d'un sous-canal isolé ; à ce stade, nous considérons un seul sous-canal entouré de trois piles à combustibles. Il s'agit d'une simplification grossière, qui permet de se familiariser avec les différents paramètres et astuces du problème et de distinguer les différentes difficultés.
- Dans la deuxième étape, nous considérons la modélisation du cœur entier du réacteur. Dans ce cas nous tiendrons compte des échanges intercanal de masse et d'énergie.

#### 3.3.1 Description du modèle simplifié

Le modèle simplifié consiste à étudier l'écoulement du fluide réfrigérant dans un sous-canal  $i$  isolé. Dans ce cas, nous supposons qu'aucun échange de masse et d'énergie n'est entretenu avec les sous-canaux voisins (figure 3.6). Pour établir les équations de conservation, nous partons toujours des hypothèses simplificatrices formulées dans la section (3.2.3) auxquelles nous rajoutons trois autres :

- Ecoulement monophasique.
- Le transfert de chaleur transversal et longitudinal par conduction et rayonnement est négligé. Cela se traduit par l'élimination du terme de diffusivité thermique dans l'équation d'énergie.

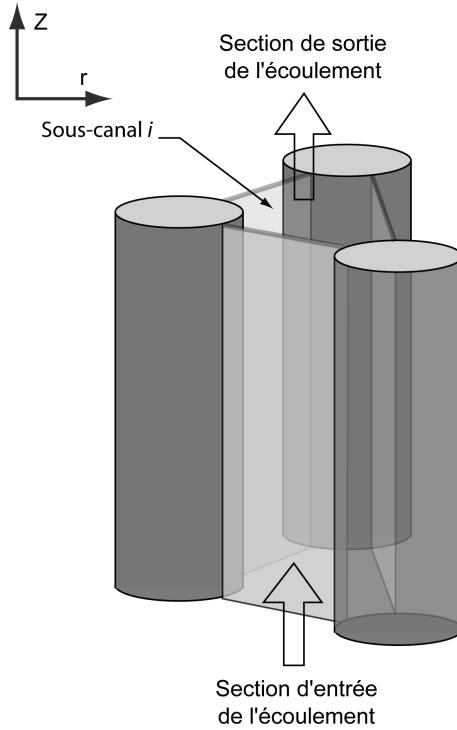


FIG. 3.6 – Schéma illustratif du modèle simplifié (1-D)

### 3.3.2 Equation de conservation de masse

En régime permanent, si nous considérons la seule direction vertical *z*, l'équation de continuité (1.3) appliquée à un volume de contrôle de section  $A_i$  (figure 3.7) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v A)_i = 0 \quad (3.5)$$

avec  $\rho$  est la densité volumique du fluide et  $v$  est la vitesse axiale de l'écoulement.

Soit  $\dot{m}_i$  le débit massique tel que  $\dot{m}_i = \rho_i v_i A_i$ . Donc, l'équation (3.5) peut se remettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \dot{m}_i}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

Cette équation représente la variation du débit massique axial dans le sous-canal *i* par unité de longueur.

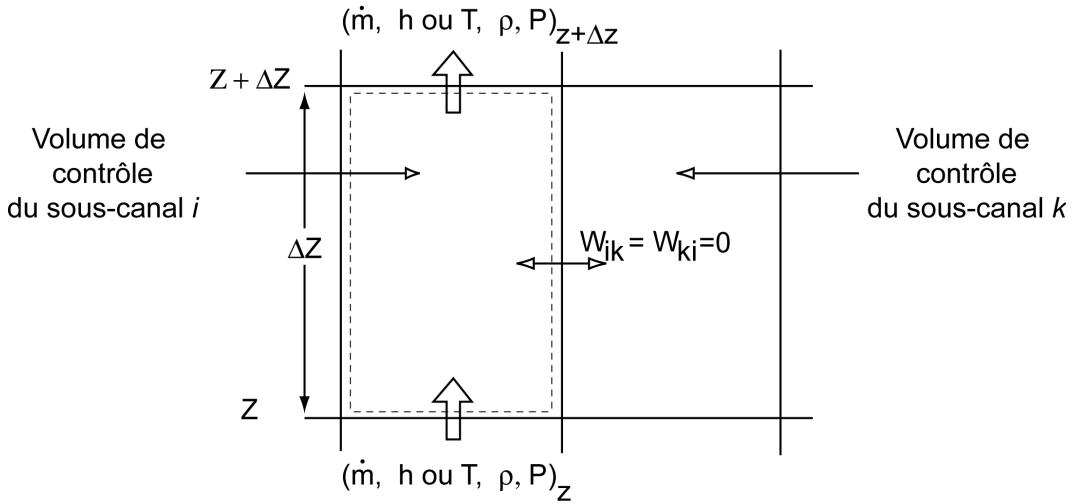


FIG. 3.7 – Principe du bilan de masse dans un volume de contrôle d'un sous-canal  $i$

### 3.3.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Le modèle simplifié ne tient pas compte des débits massiques dans les directions latérales. Ceci implique que seule la composante verticale de la vitesse qui est non nulle. Donc l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale sur un volume de contrôle d'un sous-canal  $i$  de section  $A_i$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v v A)_i = -A_i \frac{\partial P_i}{\partial z} - g A_i (\rho_i - \rho_0) - \left( \frac{f}{D_h} + K \right) \left( \frac{1}{2} \rho_i A_i |v_i| v_i \right) \quad (3.7)$$

avec :

- $P$  : Pression motrice.
- $\rho_0$  : Densité de référence du fluide (calculée à la température caractéristique du milieu).
- $f$  : Coefficient de pertes de charges dues aux frottements avec la paroi (perte de charge linéaire).
- $K$  : Coefficient de pertes de charges locales (résistance hydraulique à l'écoulement calculée qu'à l'entrée et à la sortie du sous-canal).
- $g$  : Force gravitationnelle .

Le premier membre de l'équation (3.7) représente le transport axial de la quantité de mouvement axiale. Les trois termes du second membre représentent respectivement le gradient de pression dans le fluide, les forces de volume représentées ici par la force gravitationnelle, et les résistances hydrauliques à l'écoulement. En effet, puisque nous avons supposé que les forces de viscosité à l'intérieur du fluide sont négligées, et que les seules

forces de frottement qui existent sont celles qui se manifestent entre la paroi et le fluide en mouvement, le terme de viscosité figurant dans l'équation de quantité de mouvement (1.8) est remplacé par des pertes de charges linéaires et singulières. Ces derniers sont calculés à partir des corrélations empiriques dont nous parlerons plus tard dans ce chapitre.

En utilisant le débit massique  $\dot{m}_i$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.7) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\dot{m}^2}{\rho A} \right)_i = -A_i \frac{\partial P_i}{\partial z} - g A_i (\rho_i - \rho_0) - \left( \frac{f}{D_h} + K \right) \frac{|\dot{m}_i| \dot{m}_i}{2\rho A} \quad (3.8)$$

### 3.3.4 Equation de conservation d'énergie

En se basant sur les hypothèses précédentes, le bilan d'énergie en terme d'enthalpie, appliqué sur un volume de contrôle d'un sous-canal  $i$  de section  $A_i$ , aboutit à l'équation de conservation d'énergie suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v h A)_i = A_i Q_i \quad (3.9)$$

$Q$  est la puissance thermique par unité de volume générée par les éléments combustibles (entourant le sous-canal) et reçue par le sous-canal  $i$  (figure 3.8).

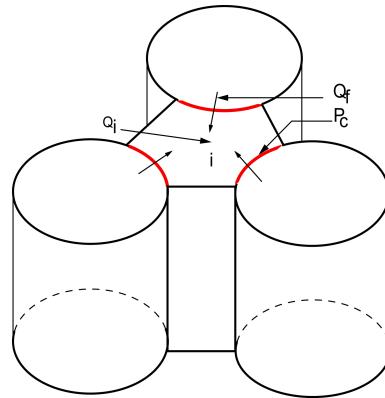


FIG. 3.8 – Puissance reçue par le sous canal  $i$  en provenance des piles à combustibles

D'après l'équation de continuité, l'équation (3.5) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{\dot{m}_i}{A_i} \frac{\partial h_i}{\partial z} = Q_i \quad (3.10)$$

La quantité de chaleur transmise par les éléments combustibles vers le sous-canal  $i$  ( $Q_i$ ) représente la somme de la chaleur dissipée par ces éléments ( $Q_f$ ), multipliée par le périmètre chauffant ( $P_c$ ) qui est en contact avec le sous-canal  $i$ .

$$Q_i = \sum Q_f P_c \quad (3.11)$$

## 3.4 Pertes de charges dans un sous-canal (pressure drop)

La perte de charge totale dans un sous-canal  $i$  représente la somme des pertes de charge par frottement visqueux entre la paroi des éléments combustible entourant le sous-canal et les pertes de charge singulières localisées à l'entrée et à la sortie de chaque sous-canal. Ces dernières sont dues au changement brusque de la section de passage du fluide. La détermination de ces pertes de charges s'effectue à travers le coefficient de perte de charge linéaire  $f$  et le coefficient de perte de charge singulière  $K$

### 3.4.1 Pertes de charges linéaires

Le coefficient de pertes de charges linéaires  $f$  figurant dans le second membre de l'équation de quantité de mouvement est calculé à partir des corrélations empiriques. Il dépend à la fois de la géométrie du sous-canal, de la vitesse et du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent).

#### Cas d'un sous-canal assimilé à un tube lisse

Dans le cas où le sous-canal est assimilé à un tube lisse, les corrélations couramment utilisées pour déterminer le coefficient  $f$  sont les suivantes :

- Ecoulement laminaire ( $\text{Re} \leq 2500$ )

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (3.12)$$

- Ecoulement turbulent ( $\text{Re} > 2500$ )

Dans ce cas, les corrélations suivantes peuvent être utilisées :

**A-** *Corrélation de Blasius* ( $\text{Re} < 30000$ )

$$f = 0.316 \text{Re}^{-0.25} \quad (3.13)$$

**B- Corrélation de Karman-Nikuradse**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.8 + 0.87 \ln \left( \text{Re} \sqrt{f} \right) \quad (3.14)$$

**C- Corrélation de McAdams**

Dans la pratique, la corrélation de Karman-Nikuradse est difficile à utiliser. Souvent on a recourt à des formes plus simplifiées. Dans ce contexte, McAdams (Toderas, 1990) propose la corrélation suivante pour des tubes lisses :

$$f = 0.184 \text{Re}^{-0.2} \quad (3.15)$$

**D- Corrélation de Colebrook**

Cette corrélation tient en compte de la rugosité relative du tube. Elle représente le rapport entre la hauteur des aspérités à l'intérieur du tube et le diamètre du tube (ou le périmètre mouillé du tube) ( $\lambda/D$ ). La rugosité relative tente d'augmenter le facteur de friction  $f$ . Le diagramme de Moody (1944) est une représentation graphique de la corrélation empirique de Colebrook suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{\lambda/D}{3.70} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \quad (3.16)$$

**Cas d'un sous-canal non circulaire****► Ecoulement laminaire**

Plusieurs études ont été menées par Sparrow et Loffler (1959) en vu de déterminer le coefficient  $f$  pour un écoulement laminaire totalement développé, et ce dans le cas d'un réseau triangulaire (ne contenant que des sous-canaux de géométrie triangulaire). Un ensemble complet de résultats a été présenté par Rehme (1971) pour différents types de réseaux (Hexagonal et carré). Cheng et Toderas (1985) ont adapté les résultats de Rehme par l'utilisation de polynômes appliquées sur chaque type de sous-canal. Les polynômes ainsi définies ont la forme suivante :

$$C'_{fil} = a + b_1(P/D - 1) + b_2(P/D - 1)^2 \quad (3.17)$$

avec

$$f_{il} = \frac{C'_{fil}}{(\text{Re}'_{il})^n} \quad (3.18)$$

Dans ce cas, où l'écoulement est laminaire,  $n = 1$

Lorsque l'équation (3.17) est appliquée sur un sous-canal latéral ou du coin, le rapport du pitch sur le diamètre de la pile à combustible ( $P/D$ ) est remplacé par ( $W/D$ ) avec  $W$  est le diamètre de la pile plus l'écart entre la pile et la paroi du réseau.

#### ► Ecoulement turbulent

Pareillement à un écoulement laminaire, Rehme (1973) a proposé une méthode de calcul du coefficient  $f$  pour un écoulement turbulent et pour différents types de réseaux. Cheng et Toderas (1985) ont aussi adapté ses résultats par l'utilisation de polynômes appliquées sur chaque type de sous-canal. Les polynômes ainsi définies se représentent sous la forme :

$$C'_{fit} = a + b_1(P/D - 1) + b_2(P/D - 1)^2 \quad (3.19)$$

avec

$$f_{it} = \frac{C'_{fit}}{(\text{Re}'_{it})^n} \quad (3.20)$$

Dans ce cas  $n = 0.18$

Le tableau (3.1) représente les coefficients  $a$ ,  $b_1$  et  $b_2$  pour différents types de SC d'un réseau hexagonal, pour un écoulement laminaire et turbulent.

TAB. 3.1 – Les coefficients  $a$ ,  $b_1$  et  $b_2$  utilisés dans le calcul du coefficient de perte de charge linéaire pour un écoulement laminaire et turbulent dans un réseau hexagonal (adapté d'après Toderas, 1990)

	1.0 ≤ $P/D$ ≤ 1.1			1.1 ≤ $P/D$ ≤ 1.5		
	$a$	$b_1$	$b_2$	$a$	$b_1$	$b_2$
<b>Ecoulement Laminaire</b>						
Sous-canal central	26.00	888.2	-3334	62.97	216.9	-190.2
Sous-canal latéral	26.18	554.5	-1480	44.40	256.7	-267.6
Sous-canal coin	26.98	1636.	-10.050	87.26	38.59	-55.12
<b>Ecoulement turbulent</b>						
Sous-canal central	0.09378	1.398	-8.664	0.1458	0.03632	-0.03333
Sous-canal latéral	0.09377	0.8732	-3.341	0.1430	0.04199	-0.04428
Sous-canal coin	0.1004	1.625	-11.85	0.1499	0.006706	-0.009567

#### 3.4.2 Pertes de charges singulières

Les pertes de charges singulières ou de formes sont des paramètres géométriques locaux quantifiant la résistance hydraulique à l'écoulement du fluide dans les conduites (ici les

sous-canaux). Elles sont dues généralement au changement brusque de la section de passage de l'écoulement. Dans un sous-canal, ces pertes de charges de formes se manifestent à l'entrée et à la sortie du sous-canal (figure 3.9). Ce sont des paramètres adimensionnels qui dépendent de la géométrie du sous-canal.

Soient  $K_r$  et  $K_e$  les coefficients de pertes de charges singulières dus respectivement au rétrécissement et à l'élargissement de la section de passage de l'écoulement. Le calcul de ces coefficients est très compliqué et change complètement d'une configuration géométrique à l'autre. Dans notre modèle thermohydraulique, nous avons utilisé les pertes de charges suivantes (*Handbook of Hydraulic Resistance*, 2001) :

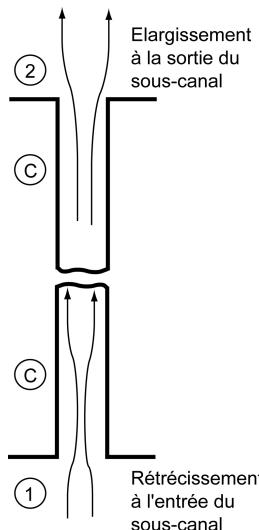


FIG. 3.9 – Schéma illustrant l'écoulement d'un fluide à travers un rétrécissement et un élargissement brusque dans un sous-canal

- Pour un élargissement brusque :

$$K_e = \left( 1 - \frac{A_1}{A_c} \right)^2 \quad (3.21)$$

- Pour un rétrécissement brusque :

$$K_r = 0.5 \left( 1 - \frac{A_2}{A_c} \right)^{0.75} \quad (3.22)$$

L'indice  $c$  est relatif à la zone (c) du sous-canal, l'indice 1 et 2 à la zone (1) et (2) respectivement.

### 3.5 Développement du modèle thermohydraulique tridimensionnel

Dans le modèle tridimensionnel, nous tenons compte de l'échange transversal de masse et d'énergie à travers les interfaces fictives séparant les SC voisins (figure 3.10). La modélisation de ces échanges latéraux implique l'établissement d'une autre équation de conservation de quantité de mouvement ; il s'agit de l'équation de quantité de mouvement transversale.

Pareillement au modèle 1D, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement (axiale et transversale) et d'énergie sont établies sur un volume de contrôle de longueur  $\Delta z$  et de section  $A_i$ .

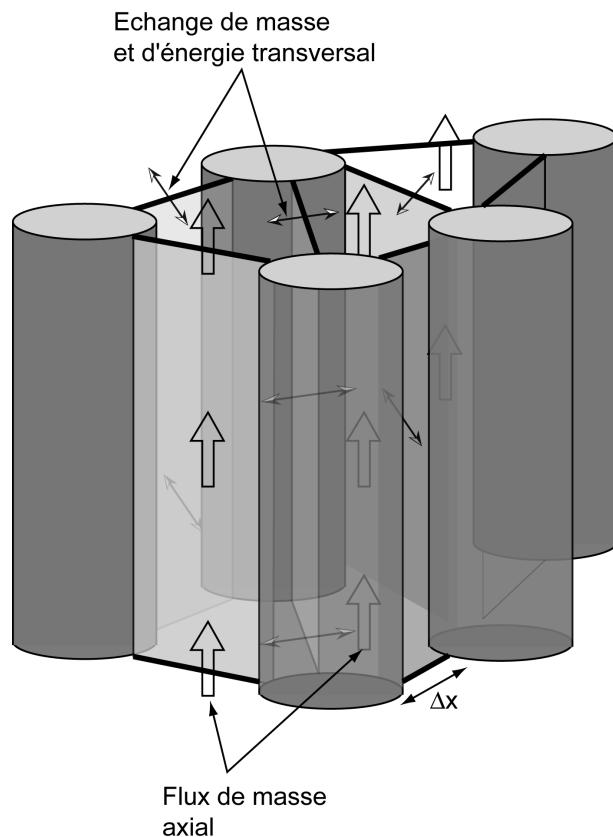


FIG. 3.10 – Flux de masse axial et celui transversale échangé entre les sous-canaux

### 3.5.1 Equation de conservation de masse

Soit un sous-canal  $i$  entouré par des sous-canaux adjacents  $k$  (figure 3.11). Le bilan axial de masse appliquée à un volume de control du sous-canal  $i$  conduit à l'équation de de continuité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v A)_i = \sum_{k=1}^{Nk} \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} + \sum_{k=1}^{Nk} (w'_{ik} - w'_{ki}) \quad (3.23)$$

avec :

- $\Delta x_{ik}$  : écart entre deux gaines voisines.
- $w_{ik}$  : vitesse transversale calculée sur la surface fictive séparant le sous-canal  $i$  et  $k$ .
- $\rho_{ik}$  : densité du fluide calculée sur la surface fictive séparant le sous-canal  $i$  et  $k$ .
- $w'_{ki}$  : flux de masse du mélange turbulent par unité de longueur dirigé du sous-canal  $k$  vers le sous-canal  $i$  ( $\text{kg}/\text{m s}$ ).
- $w'_{ik}$  : flux de masse du mélange turbulent par unité de longueur dirigé du sous-canal  $i$  vers le sous-canal  $k$  ( $\text{kg}/\text{m s}$ ).

Le deuxième terme du second membre de l'équation (3.23) représente la somme des flux massiques transversaux échangés entre le sous-canal  $i$  et les SC adjacents  $k$  et qui sont dus aux gradients de pression entre les sous-canaux. Quant au dernier terme, il représente la somme des flux massiques transversaux dus au mélange turbulent.

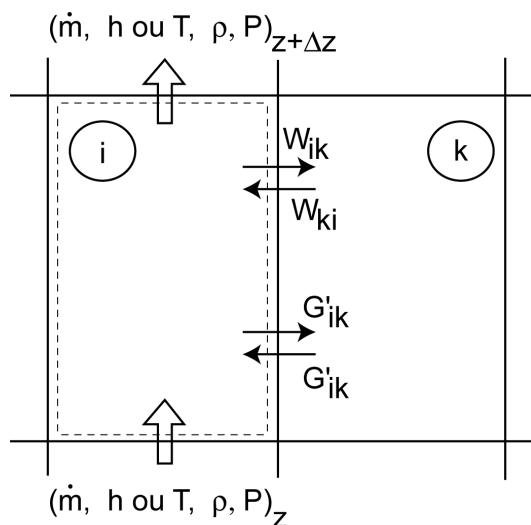


FIG. 3.11 – Principe du bilan de masse sur un volume de contrôle d'un sous-canal  $i$  en contact avec des sous-canaux  $k$

### 3.5.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de quantité de mouvement est découpée en deux équations de conservations séparées ; la première est une équation établie suivant la direction axiale permettant de définir le bilan axial de la quantité de mouvement et la deuxième est une équation transversale à travers laquelle nous pouvons déterminer les bilans massiques latéraux.

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement axiale**

Suivant la direction verticale  $z$ , l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho vvA)_i - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} v_{ik}^{**}) \Delta x_{ik} - \sum_{k=1}^{Nk} (w'_{ik} v_i - w'_{ki} v_k) = -A_i \frac{\partial P_i}{\partial z} - g A_i (\rho_i - \rho_0) - \left( \frac{f}{D_h} + K \right) \left( \frac{1}{2} \rho_i A_i |v_i| v_i \right) \quad (3.24)$$

avec :

- $v_k$  : vitesse axiale dans le sous-canal  $k$ .
- $v_i$  : vitesse axiale dans le sous-canal  $i$ .
- $v_{ik}^{**}$  : vitesse axiale dont la valeur dépend de la direction de l'écoulement :

Si l'écoulement croisé est dirigé du sous-canal  $k$  vers le sous-canal  $i$  :  $v_{ik}^{**} = v_k$

Si l'écoulement croisé est dirigé du sous-canal  $i$  vers le sous-canal  $k$  :  $v_{ik}^{**} = v_i$

Les deux premiers termes du premier membre de l'équation (3.24) représentent respectivement le transport axial et transversal de la quantité de mouvement axiale. Le troisième terme représente le transport de masse transversal dû au mélange turbulent. Le deuxième terme du premier membre de l'équation (3.24) peut s'écrire sous la forme générale :

$$\sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} v_{ik}^{**}) \Delta x_{ik} = \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} v_i) (1 - \delta_{ik}) \Delta x_{ik} + \sum_{k=1}^{Nk} \delta_{ik} (\rho_{ik} w_{ik} v_k) \Delta x_{ik} \quad (3.25)$$

avec  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Il est égal à 0 si le flux de masse est dirigé du sous-canal  $i$  vers le sous-canal  $k$ , et égal à 1 dans le cas contraire.

- **Equation de conservation de quantité de mouvement transversale**

L'échange de masse transversal entre le sous-canal  $i$  et le sous-canal  $k$  est dû essentiellement à la différence de pression entre les deux sous-canaux. Ces gradients peuvent apparaître soit naturellement à partir de la différence de puissance entre les sous-canaux,

ou d'une manière forcée, provoqués par des obstacles ou des blocages au niveau des sous-canaux.

Rowe (1973) fut le premier à introduire un modèle original de l'équation de quantité de mouvement transversale via le code COBRA. Dès lors, presque tous les modèles thermohydrauliques basés sur l'approche sous-canaux découlent de l'approche de Rowe. La seule différence qui les distingue réside dans la méthode de résolution numérique de cette équation. D'après la figure (3.12), l'équation de conservation de la quantité de mouvement transversale peut être établie sur un volume de contrôle approché par rapport au volume de contrôle exact.

Selon le modèle proposé par Rowe, le bilan de la quantité de mouvement transversale sur le volume de contrôle approché, peut être donné par :

$$(P_i - P_k) \Delta x_{ik} \Delta z + (\rho^* w v^*) \Delta x \Delta y|_{ik,z-\Delta z} - (\rho^* w v^*) \Delta x \Delta y|_{ik,z} - F_{ik} \Delta y_{ik} \Delta z = 0 \quad (3.26)$$

où  $\Delta y$  est la distance d'interaction effective entre les sous-canaux. Elle représente la distance entre les centroïdes des sous-canaux où les pressions sont calculées. La densité  $\rho^*$  est la densité du mélange calculée sur les interfaces séparant les sous-canaux voisins.

Le premier terme de l'équation (3.26) représente la différence de pression entre deux sous-canaux voisins ( $i$  et  $k$ ), le deuxième et le troisième terme représentent le transport transversal de la quantité de mouvement axiale. Le derniers terme représente les résistances hydrauliques dues aux frottements et aux changements de la section de passage du fluide (dans la direction latérale).

En faisant tendre  $\Delta z$  vers 0, l'équation (3.26) est réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho_{ik}^* w_{ik}) v_{ik}^* = \frac{P_i - P_k}{\Delta y_{ik}} - \frac{F_{ik}}{\Delta x_{ik}} \quad (3.27)$$

Le terme des résistances hydrauliques  $F_{ik}$  est représenté, dans notre modèle thermohydraulique, par les pertes de charges dues au frottement du fluide avec les parois des piles à combustibles (dans ce cas nous avons négligé les pertes de charges de forme) :

$$F_{ik} = \left( \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} \right) \Delta P_{fric} \quad (3.28)$$

avec  $\Delta P_{fric}$  est la chute de pression due au frottement définie par :

$$\Delta P_{fric} = \frac{1}{2} \xi_{ik} \rho_{ik}^* |w_{ik}| w_{ik} \quad (3.29)$$

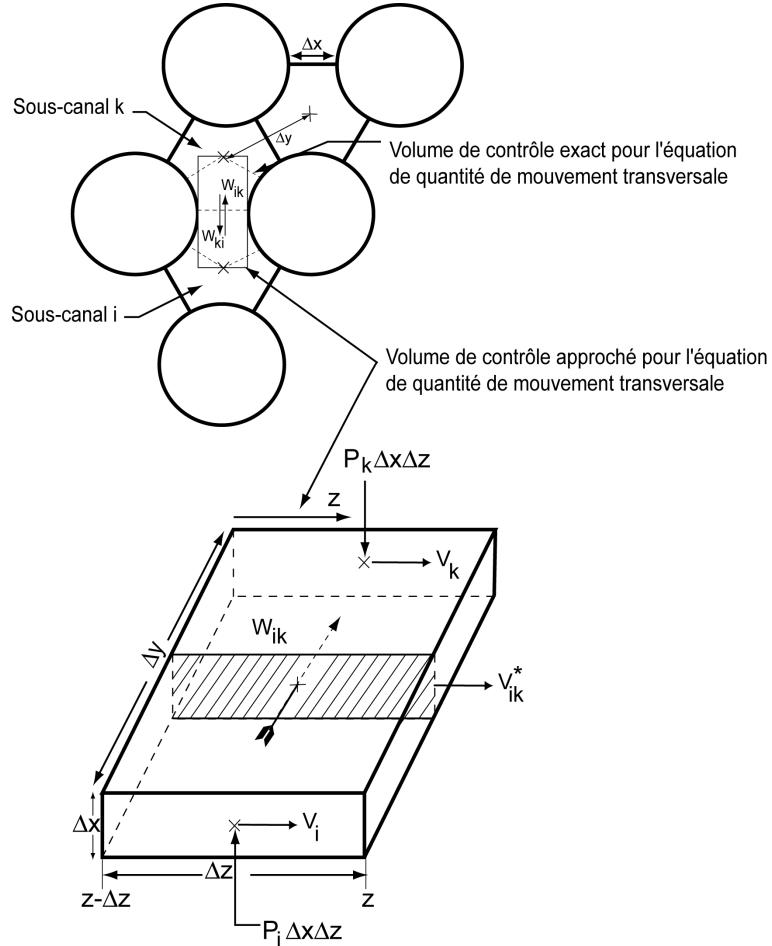


FIG. 3.12 – Volume de contrôle exact et approché sur lequel est établie l'équation de conservation de quantité de mouvement transversale

avec  $\xi_{ik}$  est un nombre adimensionnel représentant les pertes de charges par frottement dans la direction latérale.

Donc,  $F_{ik}$  vaut :

$$F_{ik} = \left( \xi_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} \right) \frac{1}{2} \rho_{ik}^* |w_{ik}| w_{ik} = \xi_{ik} \frac{1}{2} \rho_{ik}^* |w_{ik}| w_{ik} \quad (3.30)$$

Par conséquent, l'équation de conservation de quantité de mouvement transversale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho_{ik}^* w_{ik}) v_{ik}^* = \frac{P_i - P_k}{\Delta y_{ik}} - \frac{\xi_{ik}}{2 \Delta x_{ik}} \rho_{ik}^* w_{ik} |w_{ik}| \quad (3.31)$$

La vitesse  $v^*$  est calculée à l'interface entre les deux sous-canaux  $i$  et  $k$  tel que :

$$v_{ik}^* = \frac{v_i + v_k}{2} \quad (3.32)$$

La densité du mélange  $\rho_{ik}^*$  est égale à la valeur de la densité du sous-canal donneur du flux de masse transversal. Ainsi :

- Si l'écoulement croisé est dirigé du sous-canal  $k$  vers le sous-canal  $i$  ( $w_{ik} > 0$ ) :  
 $\rho_{ik}^* = \rho_k$
- Si l'écoulement croisé est dirigé du sous-canal  $i$  vers le sous-canal  $k$  ( $w_{ki} > 0$ ) :  
 $\rho_{ik}^* = \rho_i$

### 3.5.3 Equation de conservation d'énergie

L'application du bilan d'énergie sur un volume de contrôle d'un sous-canal  $i$ , entouré par des sous-canaux  $k$  et qui reçoit une puissance thermique  $Q$  conduit à l'équation de conservation d'énergie suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v h A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho w h^*)_{ik} \Delta x_{ik} - \sum_{k=1}^{Nk} (w'_{ik} h_i - w'_{ki} h_k) = Q_i \quad (3.33)$$

Les échanges d'énergie entre les SC adjacents sont issus de deux origines :

- Echange de masse dû à l'écoulement croisé dirigé entre les sous-canaux. Il est représenté par le deuxième terme du premier membre de l'équation (3.33). Ce terme peut être réécrit par :

$$\sum_{k=1}^{Nk} (\rho w \Delta x)_{ik} h_{ik}^* = \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik}) (1 - \delta_{ik}) h_i + \sum_{k=1}^{Nk} \delta_{ik} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik}) h_k \quad (3.34)$$

Le symbole de Kronecker est égal à 0 si le flux de masse est dirigé du sous-canal  $i$  vers le sous-canal  $k$  et vaut 1 dans le cas contraire.

- Echange de masse dû au mélange turbulent. Ainsi, le troisième terme de l'équation (3.33) représente le transport d'énergie par le mélange turbulent.

L'enthalpie  $h^*$  dépend de la direction du flux de masse :

Si l'écoulement croisé est dirigé du sous-canal  $k$  vers le sous-canal  $i$  ( $w_{ik} > 0$ ) :  $h_{ik}^* = h_k$

Si l'écoulement croisé est dirigé du sous-canal  $i$  vers le sous-canal  $k$  ( $w_{ki} > 0$ ) :  $h_{ik}^* = h_i$

## 3.6 Mélange turbulent

L'étude du mélange turbulent du fluide réfrigérant circulant entre les éléments combustibles a été conduite depuis l'apparition de la première centrale nucléaire (Silin, 2006). Une intéressante synthèse sur ce phénomène est présentée par Rehme (1992). Une analyse des méthodes expérimentales utilisées est explicitée dans les travaux de Chiu et al. (1980) et Bogoslovskaya (2000). Ces travaux ont été principalement orientés vers la détermination du flux de masse du mélange turbulent par unité de longueur, ainsi que les corrélations convenables utilisées dans les codes thermohydrauliques de sous-canaux comme le code COBRA (Rowe et Angle, 1969).

Le mélange turbulent décrit l'échange, entre les sous-canaux adjacents, de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Il est causé généralement par des fluctuations turbulentes de la vitesse du fluide. Plusieurs modèles sont disponibles pour modéliser ce phénomène. Le modèle largement utilisé est celui proposé par Rowe et Angle (1967) qui adopte un paramètre adimensionnel du mélange turbulent «  $\beta$  » connu aussi par « gap STANTON number ». Ainsi, le flux de masse par unité de longueur du mélange turbulent est donné par :

$$w' = \beta(\rho\bar{v}\Delta x) \quad (3.35)$$

avec  $\rho$  est la densité du fluide,  $\bar{v}$  est la vitesse moyenne axiale du fluide et  $\Delta x$  est la distance entre deux gaines voisines.

Le paramètre adimensionnel  $\beta$  est donné par (Rowe & Angle, 1967, in Tong, 1997) :

$$\beta = C\text{Re}^m \quad (3.36)$$

avec  $m$  est approximativement de l'ordre de -0.1 et  $C$  est une constante mesurée expérimentalement pour chaque géométrie. En général, Rowe & Angle (1967) propose une valeur de  $C$  égale à 0.0062.

Dans notre modèle thermohydraulique tridimensionnel, nous avons utilisé le modèle adopté par Rowe & Angle (1967) et qui est utilisé par plusieurs codes d'analyse thermohydraulique basés sur l'approche sous-canaux (Wheeler et al, 1976, in Cheng, 2003). Ainsi, si nous supposons que le mélange turbulent induit seulement un échange d'enthalpie entre les sous-canaux voisins, avec aucune variation nette du flux de masse (différence de densité du fluide entre les SC voisins est négligé), le flux de masse turbulent par unité de longueur est donné par :

$$w'_{ik} = w'_{ki} = \beta \left( \frac{\rho_i v_i + \rho_k v_k}{2} \right) \Delta x_{ik} = w' \quad (3.37)$$

Par conséquent, l'équation de conservation de masse est réécrite par :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v A)_i - \sum_{k=1}^{N_k} \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} = 0 \quad (3.38)$$

Dans le cas où la différence de densité du fluide entre les sous-canaux voisins est assez importante, Cheng (2003) a proposé les valeurs suivantes du flux de masse turbulent :

$$w'_{ik} = \beta \left( \frac{v_i + v_k}{2} \right) \rho_i \Delta x_{ik} \quad (3.39)$$

$$w'_{ki} = \beta \left( \frac{v_i + v_k}{2} \right) \rho_k \Delta x_{ik} \quad (3.40)$$

### 3.7 Calcul des résistances hydrauliques latérales

Plusieurs corrélations ont été élaborées pour déterminer le coefficient de perte de charge linéaire transversal. Zukauskas (1972) a donné la corrélation suivante valable en régime laminaire et turbulent pour le calcul de ce coefficient :

$$\Delta P = \xi \frac{NG_{\max}^2}{2\rho} Z \quad (3.41)$$

avec

- $\xi$  : coefficient adimensionnel de pertes de charges latéral par frottement.
- $G_{\max}$  : flux massique maximal.
- $N$  : nombre des éléments combustibles dans la direction du flux latéral.
- $Z$  : facteur de correction qui dépend de l'arrangement géométrique des SC utilisés.

A partir de cette définition, le coefficient  $\xi$  peut être représenté par :

$$\xi = \frac{2\Delta P}{\rho} \left( \frac{1}{v_{ref}^2} \right) \left( \frac{D_{ref}}{L} \right) \quad (3.42)$$

La vitesse de référence ( $v_{ref}$ ) peut être égale à la valeur de la vitesse minimale, moyenne ou maximale de l'écoulement. Quant à la longueur de référence  $D_{ref}$ , elle peut être le diamètre de la pile à combustible ou la distance du gap séparant deux gaines voisines (Toderas, 1990). En général, les valeurs de  $D$  et  $L$  sont définies selon les longueurs caractéristiques de l'arrangement géométrique étudié.

D'autres corrélations plus simples ont été établies pour calculer ce coefficient, plus particulièrement, pour un arrangement triangulaire de piles à combustibles. Gunter et Shaw (1945, in Vassallo, 2007) ont proposé une corrélation simple et générale qui peut être utilisée pour une large variété de configurations géométriques :

$$\xi = 1.92 \text{Re}_v^{-0.145} \left( \frac{D_v}{P} \right)^{0.4} \quad (3.43)$$

avec  $D_v$  est le diamètre hydraulique volumétrique défini par :

$$D_v = \left[ \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{P}{D} \right)^2 - 1 \right] D \quad (3.44)$$

$D$  représente le diamètre des piles à combustibles et  $P$  est le pitch. Le nombre de REYNOLDS est évalué en utilisant le diamètre hydraulique volumétrique  $D_v$  et la vitesse transversale moyenne ou maximale. Cette corrélation est valable pour ( $5 \times 10^2 < Re_v < 3 \times 10^5$ ).

♦ **Récapitulatif** : les équations thermohydrauliques du modèle tridimensionnel (3-D)

### 1) Equation de conservation de masse

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} = 0$$

### 2) Equation de conservation de quantité de mouvement axiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v v A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} v_{ik}^{**}) \Delta x_{ik} - \sum_{k=1}^{Nk} w' (v_i - v_k) &= -A_i \frac{\partial P_i}{\partial z} - g A_i (\rho_i - \rho_0) \\ - \left( \frac{f}{D_h} + K \right) \left( \frac{1}{2} \rho_i A_i |v_i| v_i \right) \end{aligned}$$

### 3) Equation de conservation de quantité de mouvement transversale

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho_{ik}^* w_{ik}) v_{ik}^* = \frac{P_i - P_k}{\Delta y_{ik}} - \frac{\xi_{ik}}{2 \Delta x_{ik}} \rho_{ik}^* w_{ik} |w_{ik}|$$

### 4) Equation de conservation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v h A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho w h^*)_{ik} \Delta x_{ik} - \sum_{k=1}^{Nk} w' (h_i - h_k) = Q_i$$

### 3.8 Conclusion

Le modèle physique, que nous avons établi pour simuler l'écoulement du fluide réfrigérant autour des éléments combustibles du réacteur TRIGA est basé sur quatre équations thermohydrauliques décrivant les phénomènes de transfert de masse et d'énergie au sein du cœur du réacteur. Il s'agit de l'équation de continuité, de conservation de quantité de mouvement axiale et transversale et de l'équation d'énergie. Comme nous l'avons vu, ces équations sont non linéaires et couplées. La résolution de ces équations est un défi majeur et constitue une étape capitale qui exige l'utilisation des méthodes numériques à la fois simples et puissantes (du point de vu précision et temps de calcul).

Dans le chapitre 4, nous aborderons la partie concernant la résolution numérique des équations du modèle thermohydraulique établi.

# Chapitre 4

## Résolution numérique

### 4.1 Introduction

Le modèle mathématique établi, décrivant les phénomènes thermohydrauliques étudiés, est basé sur quatre équations de conservation. Il s'agit de l'équation de conservation de masse, de la quantité de mouvement axiale et transversale et de l'équation d'énergie. Ce sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires et couplées. Les principales inconnues du problème sont la vitesse axiale et transversale, la pression et la température. La non-linéarité du problème se manifeste principalement dans la dépendance des différents coefficients des équations gouvernantes ainsi que des termes sources aux inconnus du problème. La résolution de ces EDP par des méthodes analytiques s'avère très compliquée voir impossible pour des cas très simplifiés.

Inévitablement, la résolution des EDP fait appel à des méthodes numériques capables d'approcher les différents termes aux dérivés partielles de ces équations. Le principe des méthodes numériques repose sur l'approximation du problème continu initial par un système discret d'équations algébriques. Dans la littérature, nous distinguons trois grandes classes de méthodes numériques pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des éléments finis.

La méthode des différences finies a été, depuis longtemps, la méthode largement connue

---

et utilisée pour calculer numériquement, sur une machine de calcul, une solution approchée des EDP, en des points discrets d'une grille. Contrairement à la méthode des différences finies, qui utilise des approximations de dérivées, la méthode des volumes finis utilise des approximations intégrales sur des volumes de contrôle appelés volumes finis. L'utilisation de cette méthode revêt d'une grande importance en mécanique des fluides. Quant à la méthode des éléments finis, elle s'appuie sur une formulation variationnelle des EDP. Elle est basée sur la méthode des résidus pondérés ou la méthode de Galerkin. Elle est souvent utilisée en mécanique des structures où souvent sont rencontrés des problèmes avec des géométries à frontières curvilignes. En dépit de toute cette diversité de méthodes numériques, la méthodes des différences finies restent très populaires et la plus répandue, particulièrement dans les analyses thermohydrauliques détaillées des cœurs des réacteurs nucléaires (Veloso, 2004 ; Buksha, 2000 ; Macdougall, 1984, Rowe, 1973), et ce, grâce à son importance dans la pratique, vu la facilité de son usage et de leur efficacité numérique vis-à-vis du temps et de la précision du calcul numérique.

Dans notre étude, nous proposons la méthode des différences finies pour discrétiser les équations de conservation établies dans le 3<sup>ème</sup> chapitre. En plus, par l'utilisation de cette méthode, le traitement de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction latérale ne pose pas autant de difficultés rencontrées dans le cas de l'utilisation de la méthode des volumes finis. Quant au couplage entre la vitesse et la pression, il est résolu par l'algorithme SIMPLE proposé par Patankar et Spalding (1972) qui constitue l'une des méthodes de ségrégation largement utilisée dans les problèmes CFD.

## 4.2 Discrétisation spatiale en différences finies des équations thermohydrauliques

Soit  $j$  l'indice de la position des nœuds dans un domaine de calcul tel que  $j = 1, 2, \dots, N + 1$  et  $\Delta z$  un pas de discrétisation axial. Par l'utilisation de la méthode des différences finies, plusieurs schémas numériques peuvent être utilisés pour approcher la dérivée première d'une variable  $\Phi$ . Parmi ces schémas nous distinguons :

**Schéma en avant :**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_j = \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{\Delta z} + O(\Delta z) \quad (4.1)$$

**Schéma en arrière :**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_j = \frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{\Delta z} + O(\Delta z) \quad (4.2)$$

**Schéma centré :**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_j = \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}}{2\Delta z} + O(\Delta z)^2 \quad (4.3)$$

Pour discréteriser les différents termes convectifs des équations thermohydrauliques, nous avons appliqué le schéma centré (second ordre) pour les nœuds internes du domaine de calcul représenté sur la figure (4.1). Quant aux nœuds situés sur les frontières du domaine ( $z = 0$  et  $z = L$ ), l'utilisation d'un schéma centré nécessite un nœud supplémentaire situé à l'extrémité du domaine. Donc, dans cette situation, il est plus pratique d'utiliser un schéma de différence arrière pour le premier nœud ( $z = 0$ ) et un schéma de différence avant pour le dernier nœud ( $z = L$ ).

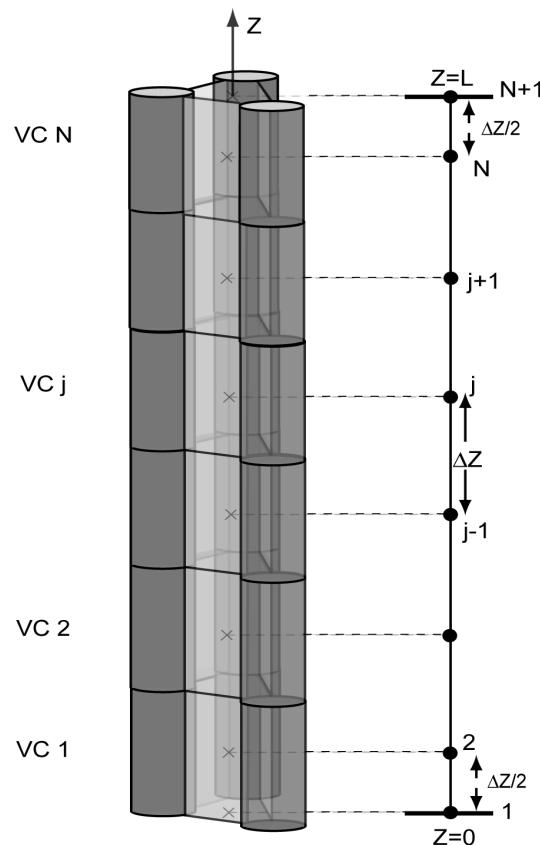


FIG. 4.1 – Discréétisation axial d'un sous-canal

### 4.2.1 Equation de continuité

L'équation de continuité pour un sous-canal  $i$  s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} = 0 \quad (4.4)$$

En utilisant le schéma centré, l'équation de continuité sous la forme discrétisée est donnée par :

$$\frac{[(\rho v A)_i]_{j+1} - [(\rho v A)_i]_{j-1}}{2\Delta z} - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik})_j = 0 \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Equation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction axiale

Pour un sous-canal  $i$ , l'équation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction axiale est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\rho v v)_i & - \left[ \sum_{k=1}^{Nk} \left( \rho_{ik} w_{ik} v_i \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right) (1 - \delta_{ik}) + \sum_{k=1}^{Nk} \left( \rho_{ik} w_{ik} v_k \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right) \delta_{ik} \right] \\ & - \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^{Nk} w' (v_i - v_k) = \\ & - \frac{\partial P_i}{\partial z} - g(\rho_i - \rho_0) - \left( \frac{f}{D_h} + K \right) \left( \frac{1}{2} \rho_i |v_i| v_i \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Après discrétisation de l'équation (4.6), les différents termes (a-f) sous la forme discrétisée s'écrivent sous la forme suivante :

(a) :

$$\frac{(\rho_i v_i)_{j+1} v_{i,j+1} - (\rho_i v_i)_{j-1} v_{i,j-1}}{2\Delta z} \quad (4.7)$$

(b) :

$$\left[ \sum_{k=1}^{Nk} \left( \rho_{ik} w_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right)_j (1 - \delta_{ik}) (v_i)_j + \sum_{k=1}^{Nk} \delta_{ik} \left( \rho_{ik} w_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right)_j (v_k)_j \right] \quad (4.8)$$

(c) :

$$\frac{1}{A_i} \left[ \sum_{k=1}^{Nk} w'_j (v)_{i,j} - \sum_{k=1}^{Nk} (w' v_k)_j \right] \quad (4.9)$$

(d) :

$$\left[ \frac{(P_i)_{j+1} - (P_i)_{j-1}}{2\Delta z} \right] \quad (4.10)$$

(e) :

$$g(\rho_{i,j} - \rho_0) \quad (4.11)$$

(f) :

$$\left[ \left( \tilde{F}_i \frac{1}{2} \rho_i |v_i| \right)_j v_{i,j} \right] \quad (4.12)$$

$$\text{avec } \tilde{F}_i = \left( \frac{f}{D_h} + K \right)_i$$

En remplaçant les termes (4.7)-(4.12) dans l'équation (4.6) on obtient la forme discrétisée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction axiale :

$$a_{W,i}^v(j) v_{i,j-1} - a_{P,i}^v(j) v_{i,j} + a_{E,i}^v(j) v_{i,j+1} = S u_i^v(j) \quad (4.13)$$

avec :

$$a_{W,i}^v(j) = -\frac{1}{2\Delta z} (\rho_i v_i)_{j-1}$$

$$a_{P,i}^v(j) = \sum_{k=1}^{Nk} (1 - \delta_{ik}) \left( \rho_{ik} w_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right)_j + \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^{Nk} w'_j - \left( \tilde{F} \frac{1}{2} \rho_i |v_i| \right)_j$$

$$a_{E,i}^v(j) = \frac{1}{2\Delta z} (\rho_i v_i)_{j+1}$$

---


$$S u_i^v(j) = \left[ \frac{(P_i)_{j+1} - (P_i)_{j-1}}{2\Delta z} + g (\rho_i - \rho_o)_j - \sum_{k=1}^{Nk} \left( \delta_{ik} \left( \rho_{ik} w_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right)_j + \frac{(w')_j}{A_i} \right) (v_k)_j \right]$$

### 4.2.3 Equation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction transversale

L'équation de conservation de quantité de mouvement suivant la direction transversale est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{ik}^* w_{ik} v_{ik}^*) = \frac{P_i - P_k}{\Delta y_{ik}} - \frac{\xi_{ik}}{2\Delta x_{ik}} \rho_{ik}^* |w_{ik}| w_{ik} \quad (4.14)$$

La discréétisation du premier terme de l'équation (4.14) donne :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{ik}^* v_{ik}^*) w_{ik} = \frac{(\rho_{ik}^* v_{ik}^*)_{j+1} w_{ik,j+1} - (\rho_{ik}^* v_{ik}^*)_{j-1} w_{ik,j-1}}{2\Delta z} \quad (4.15)$$

la discréétisation du premier terme du second membre de l'équation (4.14) donne :

$$\left( \frac{1}{\Delta y_{ik}} \right) (P_{i,j} - P_{k,j}) \quad (4.16)$$

Quant au dernier terme du second membre de l'équation (4.14), il s'écrit sous la forme discréétisée suivante :

$$\left( \frac{\rho_{ik}^* \xi_{ik}}{2\Delta x_{ik}} \right)_j |w_{ik,j}| w_{ik,j} \quad (4.17)$$

En remplaçant les termes (4.15)-(4.17) dans l'équation (4.14) nous trouvons la forme discréétisée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction transversale :

$$a_{W,i}^w(j) w_{i,j-1} - a_{P,i}^w(j) w_{i,j} + a_{E,i}^w(j) w_{i,j+1} = S u_i^w(j) \quad (4.18)$$

avec :

$$a_{W,i}^w(j) = - \left( \frac{1}{2\Delta z} \right) (\rho_{ik}^* v_{ik}^*)_{j-1}$$

$$a_{P,i}^w(j) = - \left( \frac{\rho_{ik}^* \xi_{ik}}{2\Delta x_{ik}} \right)_j |w_{ik,j}|$$

$$a_{E,i}^w(j) = \left( \frac{1}{2\Delta z} \right) (\rho_{ik}^* v_{ik}^*)_{j+1}$$

$$S u_i^w(j) = \left( \frac{1}{\Delta y_{ik}} \right) (P_{i,j} - P_{k,j})$$

#### 4.2.4 Equation de conservation d'énergie

L'équation de conservation d'énergie s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\rho v h A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} [(\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik}) (1 - \delta_{ik}) (h_i) + \delta_{ik} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik}) (h_k)] \\ - \sum_{k=1}^{Nk} w' (h_i - h_k) = Q_i \end{aligned} \quad (4.19)$$

La discréétisation en différence finie centré de premier terme du premier membre de l'équation (4.19) donne :

$$\frac{(\rho v A)_{i,j+1} h_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j-1} h_{i,j-1}}{2\Delta z} \quad (4.20)$$

Le deuxième et le troisième terme du premier membre sont approchés par :

$$\sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik})_j (1 - \delta_{ik}) (h_i)_j + \sum_{k=1}^{Nk} \delta_{ik} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik})_j (h_k)_j \quad (4.21)$$

$$\sum_{k=1}^{Nk} w'_j (h_{i,j} - h_{k,j}) = \left[ \sum_{k=1}^{Nk} w'_j (h)_{i,j} - \sum_{k=1}^{Nk} (w' h_k)_{i,j} \right] \quad (4.22)$$

En remplaçant les expressions (4.20)-(4.22) dans l'équation (4.19), la forme discréétisée de l'équation de conservation d'énergie s'écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$a_{W,i}^h(j) h_{i,j-1} - a_{P,i}^h(j) h_{i,j} + a_{E,i}^h(j) h_{i,j+1} = S u_i^h(j) \quad (4.23)$$

avec :

$$a_{W,i}^h(j) = - \left( \frac{1}{2\Delta z} \right) (\rho_i v_i A_i)_{j-1}$$

$$a_{P,i}^h(j) = \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik})_j (1 - \delta_{ik}) + \sum_{k=1}^{Nk} w'_j$$

$$a_{E,i}^h(j) = \left( \frac{1}{2\Delta z} \right) (\rho_i v_i A_i)_{j+1}$$

$$Su_i^h(j) = Q_i + \sum_{k=1}^{Nk} \delta_{ik} (\rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik})_j (h_k)_j - \sum_{k=1}^{Nk} (w' h_k)_j$$

Nous remarquons que toutes les équations discrétisées (4.13), (4.18) et (4.23) peuvent s'écrire sous la forme d'un système algébrique tridiagonal :

$$a_{W,i}^\Phi(j)\Phi_{W,i} - a_{P,i}^\Phi(j)\Phi_{P,i} + a_{E,i}^\Phi(j)\Phi_{E,i} = Su_i^\Phi(j) \quad (4.24)$$

avec  $Su$  est le second membre,  $a_W^\Phi$ ,  $a_P^\Phi$  et  $a_E^\Phi$  sont les coefficients résultant de la discrétilisation des EDP.  $\Phi$  représente les inconnues du problème ( $v$ ,  $w$ ,  $h$  ou  $T$ ).

Sous forme matricielle on a :

$$[M]\Phi = Su \quad (4.25)$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} a_{P,i,1}^\Phi & a_{E,i,1}^\Phi & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{W,i,2}^\Phi & a_{P,i,2}^\Phi & a_{E,i,2}^\Phi & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{W,i,3}^\Phi & a_{P,i,3}^\Phi & a_{E,i,3}^\Phi & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{W,i,N}^\Phi & a_{P,i,N}^\Phi & a_{E,i,N}^\Phi \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{W,i,N+1}^\Phi & a_{P,i,N+1}^\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{i,1} \\ \Phi_{i,2} \\ \Phi_{i,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{i,N} \\ \Phi_{i,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Su_{i,1}^\Phi \\ Su_{i,2}^\Phi \\ Su_{i,3}^\Phi \\ \vdots \\ \vdots \\ Su_{i,N}^\Phi \\ Su_{i,N+1}^\Phi \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Avec  $M$  est une matrice tridiagonal de dimension  $N+1$ .

### 4.3 Linéarisation

Dans les systèmes d'équations discrétisées que nous avons trouvé, deux grandes difficultés apparaissent. La première est liée au non linéarité des équations. En effet, les différents coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_P$  et  $Su$  dépendent de l'inconnu lui-même. La deuxième difficulté est liée au couplage entre les différentes équations. Ce couplage se manifeste dans la dépendance des coefficients résultant de la discrétilisation des EDP aux autres inconnus du problème. Dans cette situation, il est nécessaire d'utiliser un algorithme itératif qui permet d'une part la linéarisation des différentes équations, et d'autre part, le découplage entre les différentes variables du problème. L'algorithme numérique que nous avons utilisé est basé sur la stratégie « de prédition correction » dite de Newton-Raphson. Au début

du processus itératif, on propose un champ arbitraire pour les différents inconnus qui doit être le plus proche possible de la réalité. Ensuite, on calcul les coefficients approchés  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_P$  et  $Su$  pour obtenir un champ plus correct. Ce champ corrigé doit être utilisé par la suite pour actualiser les coefficients précédents. Le processus itératif se répète séquentiellement jusqu'à atteindre la convergence. L'inconvénient de cet algorithme itératif réside dans le fait que la convergence n'est pas toujours assurée. Pour remédier à ce problème, il est utile d'introduire un terme d'inertie (régime dynamique) fictif dans les différentes équations du modèle malgré que ces équations sont écrites pour un régime permanent. Dans ce régime dynamique fictif, on suppose comme si la prédiction (le champ proposé au début) n'est qu'une condition initiale (à  $t=0$ ). A travers les itérations, les différentes variables passent par un régime transitoire (fictif). La convergence sera atteinte lorsque le régime permanent s'établit et le terme d'inertie fictif s'annule.

L'utilisation du régime dynamique fictif se fait par l'implémentation dans les équations de conservation, des termes d'inertie fictif pour la vitesse axiale, la vitesse transversale et l'enthalpie. La discréétisation de ces termes d'inertie fictif est effectuée via la méthode de différences finies en utilisant le schéma en arrière implicite.

Soit  $n$  le superscript désignant l'itération actuelle, et  $n-1$  l'itération précédente. La discréétisation de terme d'inertie fictif pour une variable  $\Phi$  sur un sous-canal  $i$  est donnée par :

$$\frac{\partial(\rho_i \Phi_i)}{\delta t'} = \frac{\rho_{i,j}^{n-1}}{\delta t'} \left( (\Phi_i)_j^n - (\Phi_i)_j^{n-1} \right) \quad (4.27)$$

Le pas du temps  $\delta t'$  est choisi d'une manière à faciliter la convergence du processus itératif. Si la résolution des équations est achevée, la variation par rapport au temps de la variable  $\Phi$  s'annule automatiquement ( $(\Phi_i)_j^n = (\Phi_i)_j^{n-1}$ ).

Donc, les coefficients  $a_p$  et  $Su$  dans les équations de conservation discréétisées sont réécrites de la façon suivante :

**Equation de conservation de quantité de mouvement axiale :**

$$a_{p,i}^v(j) = \sum_{k=1}^{Nk} (1 - \delta_{ik}) \left( \rho_{ik} w_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right)_j^{n-1} + \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^{Nk} w_j'^{n-1} - \left( \tilde{F} \frac{1}{2} \rho_i |v_i| \right)_j^{n-1} + \frac{\rho_{i,j}^{n-1}}{\delta t'} \\ Su_i^v(j) = \frac{(P_i)_{j+1}^{n-1} - (P_i)_{j-1}^{n-1}}{2\Delta z} + g (\rho_i - \rho_o)_j^{n-1} - \sum_{k=1}^{Nk} \left( \delta_{ik} \left( \rho_{ik} w_{ik} \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} \right)_j^{n-1} + \frac{(w')_j^{n-1}}{A_i} \right) (v_k)_j^{n-1} \\ + \frac{\rho_{i,j}^{n-1}}{\delta t'} (v_i)_j^{n-1}$$

**Equation de conservation de quantité de mouvement transversale :**

$$a_{p,i}^w(j) = - \left( \frac{\rho_{ik}^* \zeta_{ik}}{2\Delta x_{ik}} \right)_j^{n-1} |w_{ik,j}|^{n-1} - \left( \frac{1}{\delta t'} \right) \left( \rho_{ik,j}^* \right)^{n-1}$$

$$Su_i^w(j) = \left( \frac{1}{\Delta y_{ik}} \right) \left( P_{i,j}^{n-1} - P_{k,j}^{n-1} \right) - \left( \frac{1}{\delta t'} \right) \left( \rho_{ik}^* w_{ik} \right)_j^{n-1}$$

**Equation de conservation d'énergie :**

$$a_p^h(j) = \sum_{k=1}^{Nk} \left( \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} \right)_j^{n-1} (1 - \delta_{ik}) + \sum_{k=1}^{Nk} w_j'^{n-1} - \frac{\rho_{i,j}^{n-1}}{\delta t'}$$

$$Su_i^h(j) = Q_i + \sum_{k=1}^{Nk} \delta_{ik} \left( \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} \right)_j^{n-1} (h_k)_j^{n-1} - \sum_{k=1}^{Nk} (w' h_k)_j^{n-1} + \frac{\rho_{i,j}^{n-1}}{\delta t'} (h_i)_j^{n-1}$$

## 4.4 Résolution numérique des systèmes algébriques

Le système d'équations résultant de la discrétisation de chaque équation est un système algébrique tri-diagonal. Pour la résolution de l'équation d'énergie nous avons utilisé la méthode directe « TDMA » (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*). Les autres équations sont résolues en utilisant la méthode itérative de *Gauss-Seidel*. Le choix de ces méthodes dépend principalement du degré de couplage et de non linéarité des EDP. Pour faciliter et améliorer la convergence du processus itératif, nous avons utilisé la méthode de sous-relaxation **SOR** « Successive Over-Relaxation » qui est une amélioration de la convergence de la méthode itérative de *Gauss-Seidel*, appliquée notamment pour l'équation de correction de pression et les deux équations de quantité de mouvement. L'annexe A présente de plus amples détails concernant la méthode de TDMA et de *Gauss-Seidel* avec sous-relaxation.

## 4.5 Traitement du couplage Pression-Vitesse : Algorithme SIMPLE

On entend par couplage Pression-Vitesse, la liaison qui existe entre le champ de pression et le champ de vitesse. En effet, l'équation de conservation de la quantité de mouvement contient le terme de gradient de pression.

Cependant cette équation ne peut être résolue que si le champ de pression est spécifié, c'est-à-dire en fixant un champ de pression. Cependant, pour différents champs de pression, que nous aurons fixé, nous aurons différents champs de vitesse. Si le champ de pression est exact, le champ de vitesse résultant de la résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement doit satisfaire également l'équation de continuité. La contrainte qui permet la détermination du champ de pression est donc de l'équation de continuité. La manière dont il faut résoudre le couplage Pression-Vitesse a fait l'objet de nombreuses études (Patankar et Spalding (1972) ; Patankar, 1980 ; Van Doormaal, 1984 ; Moukallad, 2000). Il en résulte un certain nombre d'algorithme (**SIMPLE**, **SIMPLER**, **SIMPLEC**, ...) qui ne diffèrent que par la technique utilisée pour le traitement de ce couplage.

Dans notre modèle, la détermination du champ de température du fluide réfrigérant dans un sous-canal, dépend directement du champ de vitesse qui est lui-même lié à la distribution de la pression dans le sous-canal. Ainsi, la résolution du couplage pression-vitesse est une étape vitale dans le processus de résolution des équations de conservation. Puisqu'il n'y a pas une forme explicite de l'équation de pression pour traiter ce couplage Pression-Vitesse, nous avons utilisé l'algorithme **SIMPLE** (**Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations**) développé par Patankar et Spalding (1972). L'algorithme **SIMPLE** fait implémenter, à partir de l'équation de continuité, une équation dite de correction de pression. Le rôle de cette équation est de forcer le processus itératif à converger vers une solution qui vérifie l'équation de continuité.

Soit  $P^*$  le champ de pression approché. Ainsi, les vitesses axiales et transversales peuvent être calculées à partir des équations discrétisées (4.13) et (4.18) réécrites là sous la forme standard suivant la notation adopté par Patankar (1980) :

$$(a_p^v v_p^*)_i = \sum (a_{nb}^v v_{nb}^*)_i + \underbrace{\frac{P_{i,j+1}^* - P_{i,j-1}^*}{2\Delta z} + S_{i,\text{axial}}}_{\text{Terme source}} \quad (4.28)$$

$$(a_p^w w_p^*)_i = \sum (a_{nb}^w w_{nb}^*)_i + \underbrace{\frac{P_{i,j}^* - P_{k,j}^*}{\Delta y_{ik}} + S_{i,\text{transversale}}}_{\text{Terme source}} \quad (4.29)$$

L'indice «  $nb$  » désigne les termes et les coefficients voisins au nœud central «  $P$  » (nœuds Est/Ouest). Le superscript (\*) indique la valeur approximée des vitesses ( $v$  et  $w$ ) avant leurs corrections.

Une fois les vitesses sont calculées, la procédure de calcul des termes de correction de pression à travers l'équation de correction de pression est entamée. Ensuite, la vitesse calculée et le champ de pression proposé seront corrigés.

#### ► Correction de la vitesse axiale et transversale

Pour obtenir les champs exactes à partir des champs approximatifs, nous introduisons des champs de correction de vitesse et de pression que nous notons  $\delta v$ ,  $\delta w$  et  $\delta P$  qui sont définis par :

$$v = v^* + \delta v \quad (4.30)$$

$$w = w^* + \delta w \quad (4.31)$$

$$P = P^* + \delta P \quad (4.32)$$

La substitution du champ de pression corrigé  $P$ , dans les équations de conservation de quantité de mouvement axiale et transversale, nous permet de trouver les valeurs corrigées des vitesses ( $v, w$ ).

Ainsi, en soustrayant l'équation (4.13) de l'équation (4.28) et l'équation (4.18) de l'équation (4.29) nous obtenons :

$$a_p^v (v_p - v_p^*) = \sum a_{nb}^v (v_{nb} - v_{nb}^*)_i + \frac{1}{2\Delta z} [(P_{i,j+1} - P_{i,j+1}^*) - (P_{i,j-1} - P_{i,j-1}^*)] \quad (4.33)$$

$$a_p^w (w_{ik,p} - w_{ik,p}^*) = \sum a_{nb}^w (w_{ik} - w_{ik}^*)_{nb} + \frac{1}{\Delta y_{ik}} [(P_{i,j} - P_{i,j}^*) - (P_{k,j} - P_{k,j}^*)] \quad (4.34)$$

En substituant les expressions de corrections (4.30)-(4.32) dans les deux équations (4.33) et (4.34) nous obtenons :

$$a_p^w \delta w_{ik,p} = \sum a_{nb}^w \delta w_{ik,nb} + \frac{1}{\Delta y_{ik}} [\delta P_{i,j} - \delta P_{k,j}] \quad (4.35)$$

$$a_p^w \delta w_{ik,p} = \sum a_{nb}^w \delta w_{ik,nb} + \frac{1}{\Delta y_{ik}} [\delta P_{i,j} - \delta P_{k,j}] \quad (4.36)$$

A ce stade, la principale approximation de l'algorithme SIMPLE réside dans l'élimination des deux termes suivants :  $\sum a_{nb}^v \delta v_{i,nb}$  et  $\sum a_{nb}^w \delta w_{ik,nb}$ .

En effet, il ne s'agit que de négliger l'effet de correction des vitesses calculées aux nœuds situés au voisinage du nœud central  $p$ . Ainsi, nous obtiendrons les corrections de la vitesse axiale et transversale définies respectivement par les expressions (4.37) et (4.38) suivantes :

$$\delta v_{i,p} = \frac{1}{a_p^v} \left[ \frac{(\delta P_{i,j+1}) - (\delta P_{i,j-1})}{2\Delta z} \right] \quad (4.37)$$

$$\delta w_{i,p} = \frac{1}{a_p^w} \left[ \frac{\delta P_{i,j} - \delta P_{k,j}}{\Delta y_{ik}} \right] \quad (4.38)$$

Une autre approximation peut être appliquée sur les deux coefficients  $a_p^v$  et  $a_p^w$ . D'après Buksha (2000), ces deux termes peuvent être réduits selon la forme suivante :

$$a_p^v = \frac{\rho_{i,j}}{\delta t'} \quad (4.39)$$

$$a_p^w = \frac{\rho_{ik,j}}{\delta t'} \quad (4.40)$$

En remplaçant respectivement (4.39) et (4.40) dans (4.37) et (4.38), nous obtenons les expressions finales des équations de correction de vitesse axiale et transversale :

$$\delta v_i = v_i - v_i^* = \left( \frac{\delta t'}{\rho_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\delta P_i) \quad (4.41)$$

$$\delta w_{ik} = w_{ik} - w_{ik}^* = \frac{\delta t'}{\rho_{ik} \Delta y_{ik}} (\delta P_i - \delta P_k) \quad (4.42)$$

### ► équation de correction de pression

Les vitesses approximées  $v^*$  et  $w^*$  calculées à partir du champ de pression  $P^*$  ne peuvent pas satisfaire l'équation de continuité. Pour forcer la solution à satisfaire à satisfaire l'équation de continuité, il faut calculer les corrections de pression  $\delta P$  à partir de l'équation de conservation de masse en éliminant tous les termes de vitesses figurant dans cette équation. En remplaçant les relations (4.41) et (4.42) dans l'équation continuité nous obtenons l'équation de correction de pression permettant de calculer  $\delta P$  :

$$\frac{\partial^2 \delta P_i}{\partial z^2} - N_k \left( \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} \right) \delta P_i = \sum_{k=1}^{N_k} \left( \rho_{ik} w_{ik}^* \frac{\Delta x_{ik}}{\delta t' A_i} \right) - \sum_{k=1}^{N_k} \left( \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} \right) \delta P_k - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i v_i^*) \quad (4.43)$$

Si la résolution de l'équation de correction de pression s'effectue pour le sous-canal  $i$ , les corrections de pression  $\delta P_k$  relatives aux sous-canaux voisins sont supposés nulles car

la correction ne peut s'effectuer que sur le sous-canal considéré. Ainsi, nous proposons l'équation de correction de pression suivante :

$$\frac{\partial^2 \delta P_i}{\partial z^2} - N_k \left( \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} \right) \delta P_i = \sum_{k=1}^{N_k} \left( \rho_{ik} w_{ik}^* \frac{\Delta x_{ik}}{\delta t' A_i} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i v_i^*) \quad (4.44)$$

En discrétilisant cette équation par la méthode des différences finies en utilisant du schéma centré, on obtient la forme générale discrétilisée de l'équation de correction de pression :

$$a_{W,i}^{\delta P}(j) \delta P_{i,j+1} - a_{p,j}^{\delta P}(j) \delta P_{i,j} + a_{E,i}^{\delta P}(j) \delta P_{i,j-1} = S u_i^{\delta P}(j) \quad (4.45)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{W,i}^{\delta P}(j) &= a_{W,i}^{\delta P}(j) = \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) \\ a_{p,j}^{\delta P}(j) &= \frac{2}{\Delta z^2} + N_k \left( \frac{\Delta x_{ik}}{\Delta y_{ik}} \right) \\ S u_i^{\delta P}(j) &= \sum_{k=1}^{N_k} \left( \frac{\Delta x_{ik}}{\delta t' A_i} \right) (\rho_{ik} w_{ik}^*)_j - \left( \frac{1}{\delta t'} \right) \frac{(\rho_i v_i^*)_{j+1} - (\rho_i v_i^*)_{j-1}}{2 \Delta z} \end{aligned}$$

Enfin le champ de pression corrigé dans un sous-canal  $i$  est obtenu par :

$$P_i^{\text{New}} = P_i^{\text{Old}} + \delta P_i \quad (4.46)$$

avec  $P_i^{\text{New}}$  est la nouvelle pression corrigée et  $P_i^{\text{Old}}$  est le champ de pression approché calculé à l'itération précédente.

### ► Utilisation du maillage décallé

L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction axiale fait apparaître la dérivée première de la pression. La discrétilisation du gradient de pression par la méthode des différences finies moyennant le schéma centré donne :

$$\frac{\partial P_i}{\partial z} \Big|_j = \frac{P_w - P_e}{2 \Delta z} + O(\Delta z)^2 \quad (4.47)$$

Or  $P_w$  et  $P_e$  sont les valeurs de la pression sur les faces du volume de contrôle. Elles sont inconnues et doivent être calculées à partir des valeurs au centre par interpolation.

Si nous considérons par exemple une grille uniforme (figure 4.2) et un profile linéaire de pression, la différence  $P_w - P_e$  peut s'écrire :

$$P_w - P_e = \frac{P_P - P_W}{2} - \frac{P_E - P_P}{2} = P_W - P_E \quad (4.48)$$

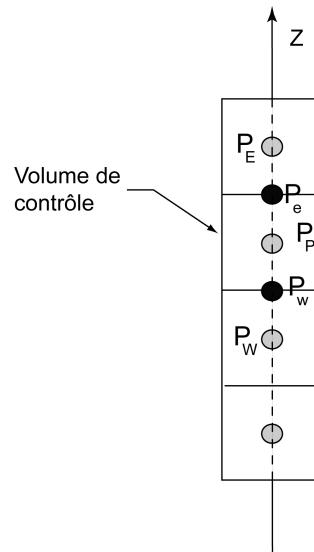


FIG. 4.2 – Maillage uniforme du champ de pression

On constate qu'il y a découplage entre les nœuds de numéros pairs et ceux de numéros impairs. Un champ de pression alternée peut donner l'impression d'un champ uniforme, ce qui n'est pas souhaitable, car il peut conduire à de faux résultats.

Dans le cas de la méthode des volumes finis, pour remédier à ce problème, Patankar (1980) a utilisé un maillage décalé pour la vitesse, de telle sorte que les nouveaux nœuds occupent le milieu des faces des volumes de contrôles du maillage initial qui sert à calculer les champs de température et de pression.

Le même principe peut être appliqué dans le cas de la méthode des différences finies. Ainsi, nous avons spécifié, pour le champ de vitesse axiale et transversale, une grille décalée par rapport au maillage correspondant au champ de pression et de l'enthalpie. La figure (4.3) schématisse les deux maillages utilisés pour calculer les différents inconnus du problème.

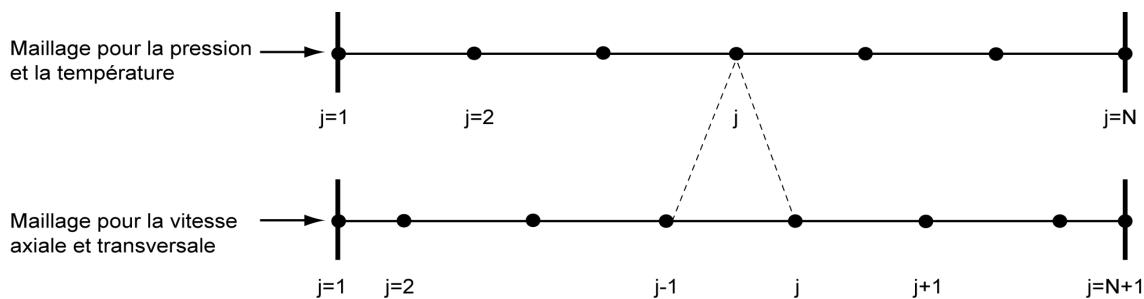


FIG. 4.3 – Schéma d'un maillage décalé

## 4.6 Conditions aux limites

Quant au choix des conditions aux limites, puisque les EDP sont du premier ordre, il nous paraît évident qu'il faut spécifier ces conditions aux limites seulement à l'entrée de chaque sous-canal. Pour l'équation de correction de pression, qui n'est pas une équation gouvernante du modèle, il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites associées à l'entrée et à la sortie du sous-canal (équation de second ordre).

Cependant, pour le modèle thermohydraulique que nous avons développé, la seule information connue, c'est la température d'entrée du fluide réfrigérant (en  $z=0$ ). Les pressions au dessous de la plaque inférieure ( $z < 0$ )  $P_s^{Bot}$  et au dessus de la plaque supérieure ( $z > L$ )  $P_s^{Top}$  peuvent être déduites à partir de la loi hydrostatique. Cela nécessite de supposer que le fluide est sans vitesse verticale dans ces deux régions.

En utilisant l'équation fondamentale de l'hydrostatique, les pressions statiques  $P_s^{Bot}$  et  $P_s^{Top}$  sont calculées par :

$$P_s = P_{atm} + \rho gh \quad (4.49)$$

où  $P_{atm}$  est la pression atmosphérique qui règne sur la surface libre (voir figure 4.4) et  $h$  est la profondeur à laquelle on doit calculer la pression statique  $P_s$ .

Pour notre modèle, les conditions aux limites seront introduites de la manière suivante :

- En  $z=0$  :

- La température du fluide est une donnée du problème :  $T(z = 0) = T_0$ .
- Les vitesses transversales et axiales ne sont pas connues. Elles sont déterminées itérativement au cours du processus de calcul itératif. Pour se faire, on propose au début des vitesses axiales et transversales approchées à l'entrée et à la sortie de chaque sous-canal  $i$  :

$$(v_i = v_{i0}^*)|_{z=0} ; (w_{ik} = w_{ik0}^* = 0)|_{z=0}$$

Durant le processus itératif, ces vitesses axiales doivent être actualisées. Dans notre modèle, nous avons proposé d'utiliser les corrélations traduisant les pertes de charges singulières moyennant les pressions calculées par le modèle thermohydraulique. Ainsi, l'actualisation de la vitesse axiale à l'entrée  $v_{i0}$  s'effectue à travers la relation suivante :

$$\Delta P = P_{i0} - P_s^{Bot} = \frac{1}{2} K_r \rho (v_{i0}^2)^* \quad (4.50)$$

ou bien :

$$v_{i_0}^* = \left( \frac{2\Delta P}{\rho_0 K_r} \right)^{1/2} \quad (4.51)$$

avec :

- $P_{i_0}$  est la pression à l'entrée du sous-canal  $i$  ( $z = 0$ ).
- $K_r$  est le coefficient de perte de charge singulière dû au changement de section à l'entrée du sous canal.

D'une manière similaire, l'actualisation de la condition aux limites concernant les vitesses transversales s'effectue à travers la relation :

$$w_{ik_0}^* = \left( \frac{2\Delta P_{ik}}{\rho \xi_{ik}} \right)^{1/2} \quad (4.52)$$

avec :

- $\Delta P_{ik} = (P_i - P_k)$  est la différence de pression entre le sous-canal  $i$  et chaque sous-canal voisin  $k$  pour  $z = 0$ .
- $\xi$  est le coefficient de pertes de charges singulières suivant la direction latérale.

• En  $z=L$  :

En  $z = L$ , la seule information nécessaire pour compléter le système d'équations est la pression. Cette pression sera déterminée itérativement à travers la corrélation traduisant la perte de charge singulière à la sortie du sous-canal en utilisant la vitesse axiale  $v_{i_L}$  calculée par le modèle.

$$P_{i_L} = K_e \frac{1}{2} \rho v_{i_L}^2 + P_s^{Top} \quad (4.53)$$

avec  $v_{i_L}$  et  $P_{i_L}$  sont respectivement la vitesse et la pression du fluide à la sortie du sous-canal  $i$ .

► **Conditions aux limites associés à l'équation de correction de pression**

L'équation de correction de pression (4.44) n'est pas l'une des équations gouvernantes du modèle. Ainsi, les conditions aux limites de cette équation ne peuvent pas être déterminées explicitement à partir du problème physique. En général, quelque soit les conditions aux limites imposées sur l'équation de correction de pression, cette dernière doit assurer que le champ de vitesse axiale et transversale corrigées satisfait l'équation de continuité.

Or, à l'entrée du sous-canal, la vitesse axiale est prise comme conditions aux limites. Ceci implique qu'il n'est pas nécessaire de corriger cette vitesse au premier noeud. Donc,

l'équation (4.44) indique que, pour  $z = 0$ , la condition imposée sur la correction de pression s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial z} = 0 \quad (4.54)$$

Cette condition est implémentée par un schéma de différence finie en avant.

A la sortie du sous-canal, la pression est connue (calculée à partir de la chute de pression à la sortie). Donc il n'est pas nécessaire de corriger cette pression ( $\delta P = 0|_{z=L}$ ).

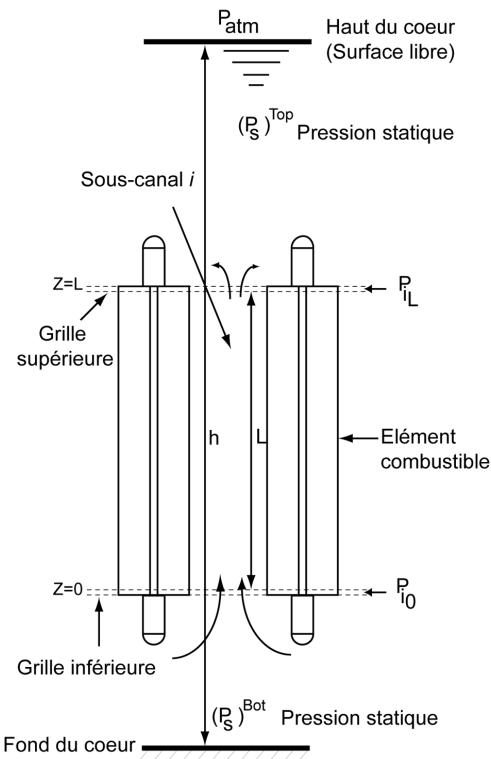


FIG. 4.4 – Schéma d'un sous-canal dans le cœur d'un réacteur de recherche

## 4.7 Procédure de résolution numérique

Les différentes équations du modèle sont résolues itérativement sur l'ensemble des sous-canaux, le tous dans un processus itératif global qui permet de se déplacer entre les SC. En d'autres termes, si le processus de résolution converge dans un sous-canal, la même procédure de calcul est répétée pour le sous-canal voisin en faisant appel aux résultats obtenus pour les sous-canaux antérieurs afin de tenir compte du couplage entre les sous-canaux adjacents.

Les différentes étapes de calcul sont résumées dans l'organigramme représenté sur la figure (4.5). Dans la procédure de calcul deux grands niveaux d'itérations peuvent être distingués :

► **Premier niveau d'itération : boucle interne**

A ce niveau, nous initions le calcul dans un sous-canal donné  $i$  par un champ approché initial de pression, de vitesse et de température. Par la suite, nous résolvons les deux équations de conservation de quantité de mouvement axiale et transversale afin d'obtenir le champ de vitesse axiale et transversale temporaire. Pour satisfaire l'équation de continuité, ce champ de vitesses est introduit dans l'équation de correction de pression pour obtenir les corrections de pression ( $\delta P$ ). A partir de ces dernières, nous corrigons le champ de pression et des vitesses axiales et transversales.

Les vitesses corrigées sont utilisées par l'équation d'énergie pour déterminer le champ de température du fluide. En fin, à partir des températures calculées, et par l'utilisation de l'équation d'état du fluide, nous pouvons déterminer la distribution de la densité volumique du fluide. Ces étapes de calcul sont répétées pour le même sous-canal jusqu'à atteindre la convergence.

Vu le fort couplage entre les équations de conservation de quantité de mouvement axial et transversale ainsi que l'équation de correction de pression, la résolution directe de ces trois équations peut induire des problèmes de convergence. Pour cela, nous signalons qu'à l'intérieur de ce premier niveau d'itération, ces trois équations sont résolues itérativement en se basant sur la méthode de *Gauss-Seidel*. Ces itérations (*Sous-boucle interne*) permettent d'actualiser à chaque fois les différents coefficients constituant les matrices et les vecteurs dans les systèmes algébriques correspondants.

► **Deuxième niveau d'itération : boucle externe**

Puisque la configuration géométrique du cœur du réacteur contient plus d'un sous-canal, un deuxième niveau d'itération, cette fois-ci extérieure (*boucle-externe*), est requis. Ceci a pour objectif de refaire le calcul pour un autre sous-canal en faisant appel aux résultats obtenus pour les sous-canaux antérieurs afin de tenir compte du couplage entre les sous-canaux. Le calcul est répété en balayant l'ensemble des sous-canaux constituant le cœur du réacteur. Après ce premier balayage, la vitesse à l'entrée de chaque sous-canal doit être actualisée pour passer au deuxième niveau de balayage. Finalement, le calcul général sur l'ensemble des SC est arrêté lorsque les critères de convergences sont satisfait.

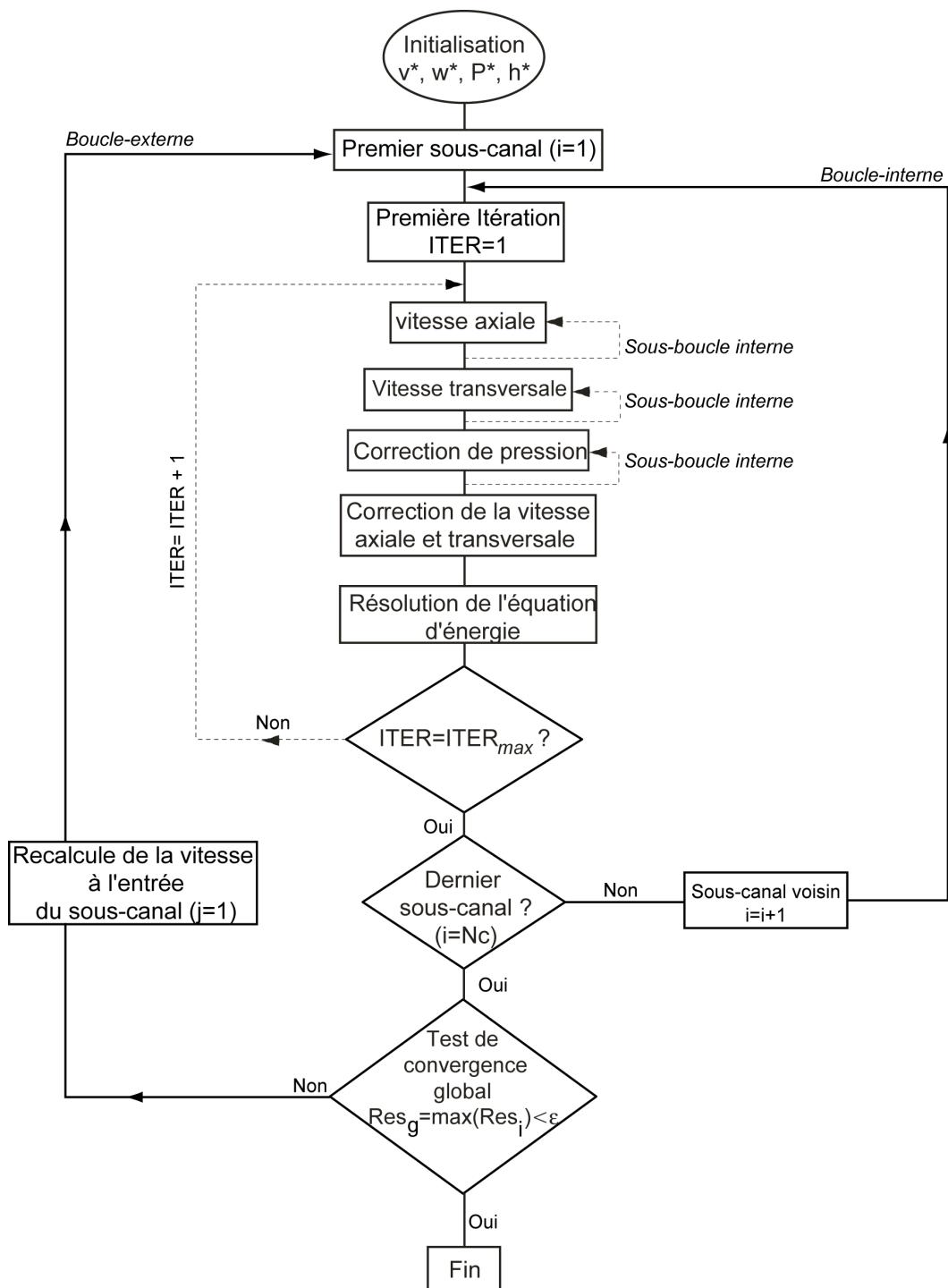


FIG. 4.5 – Procédure de résolution des équations gouvernantes du modèle thermohydraulique

## 4.8 Critère de convergence

Etant donnée le caractère non linéaire et couplé du système d'équation obtenu, le processus de la résolution doit être itéré jusqu'à la convergence. Donc l'utilisation d'un critère de convergence pour arrêter le calcul est nécessaire.

Nous considérons que la procédure de calcul a convergé si les critères de convergence suivant sont satisfaits :

- Si le maximum du résidu global  $Res_g$  calculé sur l'ensemble des sous-canaux et pour chacune des variables  $\Phi$ , vérifie la condition suivante :

$$Res_g = \max(Res_1, Res_2, \dots, Res_i, \dots, Res_{N_c}) < \varepsilon \quad (4.55)$$

avec  $\varepsilon$  est la précision du solveur et  $Res_i$  est le résidu calculé sur chaque sous-canal  $i$  tel que :

$$Res_i = \max \left( \sum (a_{nb}^\Phi \Phi_{nb})_i - (a_p^\Phi \Phi_p)_i + Su_i \right) \quad (4.56)$$

- Si le résidu adimensionnel de l'équation de conservation de masse calculé sur chaque sous-canal  $i$  satisfait la condition suivante :

$$R_{m_i} = \max \left[ \frac{[(\rho v A)_i]_W - [(\rho v A)_i]_E}{\sum_{k=1}^{N_k} [(\rho w \Delta x)_{ik}]_P} \right] \leq PM \quad (4.57)$$

avec PM est la précision massique

$\varepsilon$  et PM correspond à la tolérance fixée. La valeur de cette tolérance est choisie suivant la précision désirée. Tant que les deux relations ne sont pas satisfaites, le calcul se poursuit.

## 4.9 Développement d'un programme de résolution

En se basant sur la stratégie de résolution résumée dans la figure (4.5), nous avons développé un code de calcul écrit en langage Fortran-90 baptisé « SACATRI » (Sub-channel Analysis Code for Application to TRIga). Dans sa première version, le code SACATRI a été développé pour simuler le comportement thermohydraulique du réacteur

TRIGA MARK II installé au CENM. Ensuite, nous l'avons étendu pour simuler plusieurs configurations géométriques, notamment des lattices hexagonales et carrées. Grâce à cette vaste applicabilité, nous pouvons simuler l'écoulement du fluide refroidisseur entre les éléments combustibles de la majorité des réacteurs de type TRIGA.

#### **4.9.1 Caractéristiques techniques du code SACATRI**

Le code SACATRI est optimisé sur une plate forme Linux (2.6.22.19-Laptop-2mdv) moyennant le compilateur Intel®Fortran 11 pour Linux (version libre non commercial).

Les bibliothèques requises par le compilateur sont :

- /lib/i686/libm.so.6
- /lib/i686/libc.so.6
- /lib/libgcc\_s.so.1
- /lib/libdl.so.2
- /lib/ld-linux.so.2

Les résultats de simulation du code SACATRI que nous présentons dans cette thèse ont été obtenus sur une machine ayant les caractéristiques suivantes :

- Intel(R) Core (TM) 2 CPU T5600
- CPU : 1.83GHz
- cache size : 2048 KB

Le temps de calcul dépend de plusieurs facteurs tels que le nombre de sous-canaux, le nombre de noeuds de discréétisation et de la précision envisagée (critère de convergence). Par exemple, si nous simulons la thermohydraulique du cœur du réacteur sans tenir compte des échanges massiques latéraux, le temps de calcul est de l'ordre de 5 minutes (avec 40 volumes de contrôle). Ce temps de calcul augmente jusqu'à 30 minutes pour un calcul tenant en compte les échanges latéraux et pour le même nombre de noeuds.

#### **4.9.2 Système d'indexation des sous-canaux dans le code SACATRI**

Une étude thermohydraulique détaillée du comportement thermique et hydraulique du fluide réfrigérant au sein du cœur du réacteur, nécessite une discréétisation fine en sous-canaux. Selon la taille du cœur, celui-ci peut être représenté par une dizaine, ou une

---

centaine de sous-canaux, voir plus (Hirao, 1974 ; Veloso, 2004). Dans chaque sous-canal, il faut résoudre les équations du modèle et engendrer les échanges intercanal de masse et d'énergie. La procédure de résolution peut être très compliquée et coûteuse en terme de CPU, si nous n'admettons pas une stratégie efficace permettant une résolution souple du problème.

Nous rappelons que la procédure de calcul est purement itératif ; lorsque la résolution du système d'équations est achevée pour un sous-canal, il faut se déplacer vers le sous-canal voisin, et refaire la même procédure de calcul jusqu'à le dernier sous-canal du cœur. Donc, une partie importante de la difficulté réside dans l'organisation du protocole de balayage des SC. Par conséquent, trouver un système puissant d'indexation des SC est très intéressant. Ceci optimisera le temps de calcul, dans lequel les échanges des données thermohydrauliques entre les SC prennent une part très importante.

La méthode largement utilisée (Chelemer, 1972 ; Rowe, 1973 ; Hirao, 1974 ; Veloso, 2004 ; Waata, 2006,) consiste à numérotter les sous-canaux, les interfaces fictives séparent les SC voisins, ainsi que les piles à combustibles. La figure (4.6) représente un système d'indexation aléatoire pour un arrangement quelconque de piles à combustibles. L'essentiel est d'attribuer un numéro fixe unique à chaque partie du réseau (sous-canal, surface d'interconnexion, pile à combustible).

Soit  $N_{sc}$ ,  $N_c$ , et  $N_p$  le nombre total des sous-canaux, de surfaces d'interconnexions et de piles à combustibles respectivement (figure 4.6). Une fois les numéros sont attribués aux sous-canaux, aux surfaces fictives d'interconnexions et aux piles à combustibles, plusieurs méthodes peuvent être établies pour construire un système d'indexation convenable. En ce qui suit, nous décrivons la procédure utilisée dans le code SACATRI mais adapté à la configuration de la figure (4.6).

Soit  $i$  l'index correspondant aux SC tel que  $i = 1, 2, \dots, N_{SC}$ , et  $k$  l'index correspondant aux SC voisins. Evidemment, comme les SC sont numérotés par ordre croissant,  $k$  est toujours supérieur à  $i$  ( $k > i$ ). Egalement, soit  $c$  l'index correspondant aux surfaces d'interconnexions intercanal tel que  $c = 1, 2, \dots, N_c$ . Pour chaque interconnexion  $c$ , correspond deux couples de SC qui sont adjacents ( $i_c, k_c$ ) . Le tableau (4.1) résume la numérotation convenable pour l'arrangement de SC illustré dans la figure (4.6).

A partir du tableau (4.1), nous pouvons construire une matrice  $[\lambda]$  rectangulaire de dimensions  $(N_c \times N_{SC})$  qui correspond à la situation de la figure (4.6).

Les éléments de la matrice sont remplis en suivant la convention suivante :

$$[\lambda] = \lambda_{ci} \quad (4.58)$$

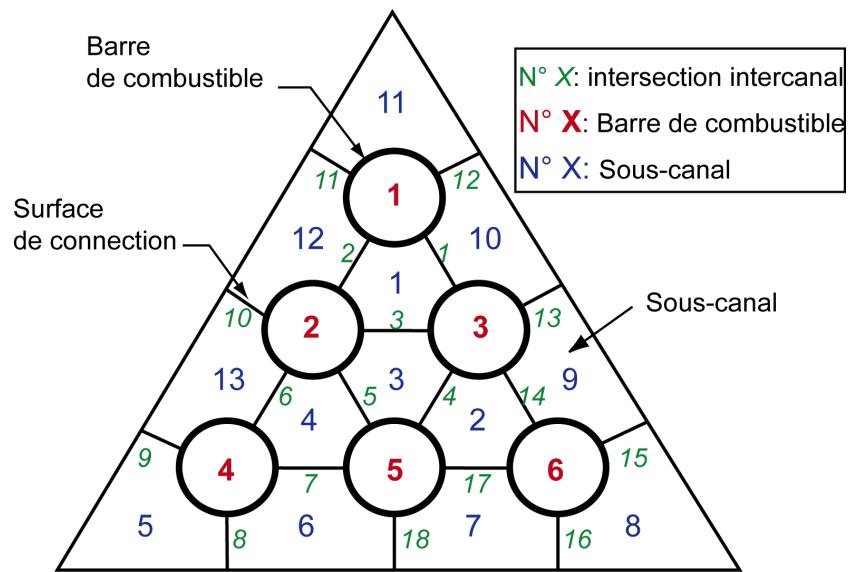


FIG. 4.6 – Système d’indexation des sous-canaux

TAB. 4.1 – Système d’indexation adopté dans la figure (4.6)

Numéro d’interconnexion ( $c$ )	sous-canal $i_c$	sous-canal $k_c$
1	1	10
2	1	12
3	1	3
4	2	3
5	3	4
6	4	13
7	4	6
8	5	6
9	5	13
10	11	13
11	12	12
12	10	11
13	9	10
14	2	9
15	8	9
16	7	8
17	2	7
18	6	7

$$\lambda_{ci} = \begin{cases} +1, & \text{Si } i = i_c \\ -1, & \text{Si } i = k_c \\ 0, & \text{Si } i \neq i_c \text{ et } i \neq k_c \end{cases} \quad (4.59)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$[\lambda]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Comme nous le remarquons, la matrice  $[\lambda]$  ou sa transposée  $[\lambda]^T$  est une matrice creuse. La détermination des SC entourant un sous-canal consiste à identifier les éléments non nuls de la matrice. Puisque la matrice peut contenir énormément d'éléments (ceci dépend de la configuration étudiée), la localisation des éléments non nuls nécessite l'introduction de la propriété suivante :

Comme  $c$  est une interconnexion associée au sous-canal  $i$ , alors :  $i = i_c$  ou  $i = k_c$ .

Dans les deux cas, les SC adjacents seront définis par :

$$m_c = i_c + k_c - i \quad (4.62)$$

Par conséquent, nous associons à chaque sous-canal  $i$  les sous canaux définis par  $m_c$ . Par convention nous introduisons le couple  $(i, m_c)$ .

Par exemple, si nous choisissons le sous-canal 4 (figure 4.6), et à partir de la matrice  $[\lambda]^T$  et de la relation (4.62), nous pouvons déterminer les SC qui lui y sont adjacents. Dans ce cas  $m_c$  vaut :

$$m_c = i_c + k_c - 4 \quad (4.63)$$

En associant la relation (4.62) à chaque ligne du tableau (4.1), nous obtenons un vecteur de dimension  $N_c$  rempli par les éléments  $m_c$  ( $\text{vecteur}(m_c)$ ). Ainsi, l'équation (4.64) nous donne les différents SC (6, 13 et 3) qui sont adjacents au sous-canal 4 :

$$k_c = [\lambda]^T \times \text{vecteur}(m_c) \times [\lambda] \quad (4.64)$$

## 4.10 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons décrit les différentes étapes suivies pour résoudre les équations gouvernantes du modèle thermohydraulique établi. Le schéma centré avec un maillage décalé est utilisé pour approximer les différents termes convectifs des équations de conservation. Le couplage pression-vitesse a été résolu en nous basant sur l'idée de l'algorithme **SIMPLE**. Pour que les résultats de simulation du code SACATRI soient fiables, il faut exercer sur le code des séries de tests numériques, afin de vérifier que l'algorithme de résolution des EDP est bien implémenté dans le code et que la solution n'est pas affectée par des sources d'erreurs numériques. Ces tests sont connus par des activités de vérification. Ensuite, le code doit être validé pour corroborer le modèle mathématique décrivant le comportement thermohydraulique du cœur du réacteur. Les activités de « vérification » et de « validation » du code SACATRI seront l'objectif du cinquième chapitre.

# Chapitre 5

## Vérification et Validation du code SACATRI

### 5.1 Introduction

A nos jours, un outil de simulation numérique est devenu indispensable dans la majorité des disciplines scientifiques. L'objectif principal d'une telle simulation est de reproduire le un phénomène scientifique ou une expérience donnée. Pour atteindre cet objectif, les codes de simulations numériques utilisés doivent reproduire exactement ou avec une tolérance acceptable les résultats expérimentaux. Le processus de comparaison entre les résultats numériques d'un code et les mesures expérimentales est connu par le processus de « *validation* ». Cependant, il est souvent difficile de réaliser cette activité de validation pour plusieurs raisons, parmi lesquelles, nous citons d'une part, la difficulté de réaliser l'expérience et d'autre part, le manque dans la littérature, des benchmarks expérimentaux spécifiques destinés à la validation. Malheureusement, même si on dispose de ces données expérimentales, une simple confrontation des résultats de simulations avec ces données, pourrait transmettre aux développeurs des codes, une idée illusoire ou funeste vis-à-vis de l'incertitude des résultats du code.

D'après un furetage bibliographique rigoureux, nous avons trouvé que la majorité des études concernant le développement des codes thermohydrauliques, ne s'appuient que sur le processus de validation pour quantifier l'incertitude de ces codes (Jiang, 2007 ; Han, 2006 ; Veloso, 2004 ; Toumi, 2000 ; Feltus, 1999). L'inconvénient majeur de ce procédé réside dans le fait que le code ne sera jamais testé d'une manière rigoureuse et approfondie. En plus, dans de nombreux cas, il s'avère difficile de détecter l'origine et le type des

---

incertitudes en se basant sur une validation expérimentale unique du code. En d'autre terme, les sources d'erreurs ne peuvent, en aucun cas, être identifiées si elles proviennent de la méthode de discréétisation des EDP utilisée, des erreurs éventuelles dans le code ou bien de l'insuffisance du modèle physique sur lequel le code est basé. Par conséquent, pour garantir une simulation précise, les activités dites de « Vérification » sont fortement recommandées avant d'entamer n'importe quelle activité de validation du code.

Récemment, la communauté scientifique internationale consacre un intérêt particulier à propos du thème de la quantification des incertitudes (Roache, 2002) dans le domaine des sciences informatiques et de l'ingénierie « CSE » (Computational Science and Engineering) et qui fait absolument appel aux activités de vérification et de validation des codes (Roache, 2002 ; Babuska, 2004 ; Oberkampf, 2008 ; Roy, 2005). En effet, la vérification d'un code diffère entièrement de la validation. Les activités de validation s'intéressent plutôt à examiner l'exactitude et le réalisme du modèle physique utilisé dans le code. Quant à la vérification, elle représente une activité purement mathématique qui permet de vérifier la capacité du code à résoudre fidèlement les EDP du modèle.

l'étude de l'exactitude de l'algorithme et de la solution numérique du code.

Deux aspects essentiels de vérification peuvent être distingués :

- La vérification du code.
- La vérification de la solution numérique du code.

Le premier aspect concerne l'estimation du taux d'erreur résultant de la simulation numérique, alors que le deuxième s'intéresse à l'évaluation de l'incertitude due aux erreurs de programmation ou des bugs qui persistent dans le code, par exemple, de la programmation du code ou d'un problème dans l'algorithme numérique, et ce, à partir des solutions analytiques ou des benchmarks numériques d'ordre de précision élevé.

Les activités concernant la « vérification du code », « vérification de la solution numérique du code » et la « validation du code » doivent être effectuées en respectant cet ordre afin de garantir le processus de quantification des incertitudes liées à la modélisation et à la simulation numérique (Roach, 1998).

Dans ce contexte, le présent chapitre abordera l'application de ces différentes activités sur le code thermohydraulique SACATRI, afin de s'assurer que le modèle physique implémenté dans le code, peut calculer les paramètres thermohydrauliques d'intérêts avec une marge d'erreur acceptable.

---

## 5.2 Activités de vérifications

L'activité de vérification du code thermohydraulique SACATRI nous a imposée de développer des benchmarks numériques capables de nous donner une idée précise sur l'exactitude de la solution numérique calculée par le code. Pour le modèle thermohydraulique unidimensionnel du code SACATRI, il est possible de trouver des benchmarks permettant de vérifier rigoureusement le code-1D. Dans ce cas, une solution analytique du problème peut être facilement obtenue. Les difficultés apparaissent dans le cas du modèle tridimensionnel, où les équations du modèle sont fortement non-linéaires et couplées entre elles sur chaque sous-canal ainsi que le couplage entre les sous-canaux voisins à travers l'échange intercanal de masse et d'énergie.

D'après notre expérience (Merroun, 2007; Merroun, 2008), principalement pour ce type de problème qui présente quelques différences par rapport aux problèmes standards rencontrés en CFD, les développeurs des codes thermohydrauliques peuvent constater d'énormes difficultés au cours de l'élaboration du code et de sa vérification. Cela est dû principalement au manque dans la littérature, des différentes méthodes de résolution des équations thermohydrauliques, ainsi que des benchmarks numériques avec des solutions analytiques exactes permettant de vérifier rigoureusement le code.

Comme nous l'avons déjà mentionné, les tests de vérification sont fortement recommandés. D'après le travail réalisé par Oberkampf et Trucano (2002), il est utile de séparer la procédure générale de vérification en deux activités fondamentales :

- Vérification de l'algorithme numérique.
- SQE (Software Quality Engineering).

La première activité concerne l'évaluation de la différence entre les résultats de simulation d'un problème donné et le modèle mathématique correspondant. Le principal objectif de cette activité est de démontrer que l'algorithme numérique adopté, pour résoudre les EDP du problème, est correctement mis en œuvre dans le code et fonctionne comme il est prévu théoriquement (Oberkampf, 2008). La deuxième activité (SQE) a pour finalité de déterminer la fiabilité du code et de sa capacité à reproduire les mêmes résultats sur différentes plateforme de calcul. Plus de détails sur cette activité peuvent être trouvés dans les travaux d'Oberkampf (2008), Roy (2005) et Christensen (2001). Dans ce travail, nous nous sommes intéressés plutôt à la première activité de vérification.

### 5.3 Procédures de vérification

Dans les activités de vérification, plusieurs approches peuvent être utilisées pour évaluer l'exactitude des résultats de simulation. Chaque approche peut donner aux développeurs et aux utilisateurs des codes de simulation un indice ou une idée différente concernant la fiabilité de ces résultats. Les tests de vérification les plus simples peuvent être basés sur :

1. L'utilisation de benchmarks vérifiés qui peuvent être trouvés dans la littérature ou bien calculés avec un degré élevé de précision.
2. Comparaison « code-code » ; il s'agit de comparer les résultats de simulation d'un code avec ceux issus d'un autre code.

Il est déconseillé de se baser uniquement sur le dernier test de vérification, car un code ne peut jamais être vérifié par une simple comparaison à un autre code qui est ou qui peut être non vérifié.

Cependant, la détection des sources d'erreurs numériques durant la vérification du code implique le développement de benchmarks de vérification de grand ordre de précision, dont les solutions sont vérifiées mathématiquement. De nombreuses références telles que Oberkampf (2004) et le guide de « *American Institute of Aeronautics and Astronautics* » (AIAA, 1998) suggèrent l'emploi des solutions analytiques exactes, qui sont considérées comme des benchmarks de très grande précision.

Dans la majorité des problèmes dont le modèle mathématique est régi par plusieurs EDP couplées et non linéaires, il est impossible de trouver des solutions analytiques exactes du problème. Vu l'importance des activités de vérification pour la qualification des codes numériques, plusieurs recherches ont été menées dans ce domaine. Parmi les solutions qui ont été proposées récemment, nous citons la méthode de solutions fabriquées (MMS) (Method of Manufactured Solution) proposée par Roach (1998). Cette méthode prévoit une procédure générale pour la construction des solutions exactes aux problèmes compliqués pour la vérification de la précision des codes. MMS a prouvé qu'elle est très sensible aux erreurs résultant de la discrétisation des EDP et permet de tester différentes options relatives à la résolution des EDP (par exemple le test de différents types de conditions aux limites). Pourtant, MMS ne peut pas détecter les erreurs de codages qui affectent le temps de calcul de l'algorithme numérique implémenté dans le code. Dans ce contexte, le test de vérification le plus rigoureux peut être basé sur l'examen de l'ordre de précision observé OOA (Observed Order of Accuracy). Le but essentiel derrière l'utilisation de ce test est de vérifier si OOA, calculé à partir de la solution numérique, est en accord avec

l'ordre de précision formel FOA (Formal Order of Accuracy) déterminé théoriquement. A cet effet, MMS et la méthode de l'évaluation de l'ordre de précision constitueront les principaux piliers sur lesquels est basé l'activité de vérification de notre code SACATRI.

### 5.3.1 La méthode de solutions fabriquées (MMS)

MMS est une procédure générale qui peut être utilisée pour construire des solutions analytiques pour les équations aux dérivées partielles. Etant donné que la vérification est un exercice purement mathématique, les solutions fabriquées peuvent être générées sans se préoccuper de la réalité physique du problème.

L'application de MMS consiste à choisir une solution continue  $\hat{\varphi}$  qui peut être pratiquement indépendante des EDP (Roache, 2002). La solution choisie doit être une fonction suffisamment différentiable permettant une description complète de l'évolution spatio-temporelle des variables. En d'autre terme, le choix d'une solution non-triviale et analytique doit vérifier tous les termes dérivatifs des EDP. Par exemple, nous pouvons choisir une solution de type tangente hyperbolique (*tanh*). Cette fonction permet d'appliquer de nombreux types de conditions aux limites.

Soit un système d'équations différentielles telle que :

$$\Gamma(\varphi) = 0 \quad (5.1)$$

avec  $\varphi$  est un vecteur de variables inconnues et  $\Gamma$  est un opérateur différentiel dont la forme spécifique dépend des EDP.

Comme il n'est pas nécessaire que la solution fabriquée  $\hat{\varphi}$  satisfait les équations gouvernantes originales, une série de termes sources  $S_\varphi$  est générée en appliquant l'opérateur différentiel  $\Gamma$  sur  $\hat{\varphi}$  :

$$\Gamma(\hat{\varphi}) = S_\varphi \quad (5.2)$$

En remplaçant le terme source  $S_\varphi$  dans l'équation (5.1), et par la résolution de cette équation, nous devons reproduire la solution proposée au début  $\hat{\varphi}$ . Les conditions aux limites peuvent être aisément obtenues à partir de la solution fabriquée  $\hat{\varphi}$ . MMS nous permet de tester différents types de conditions aux limites. Ainsi, nous pouvons utiliser  $\hat{\varphi}$  pour :

- Evaluer des conditions aux limites de type Dirichlet.
- Evaluer des conditions aux limites de type Neuman.
- Evaluer des conditions aux limites de troisième type obtenues à partir de  $\hat{\varphi}$  et de ses dérivées.

Plus de discussions concernant MMS peuvent être trouvées dans le livre publié par Knupp and Salari (2002).

### 5.3.2 Evaluation de l'ordre de précision observé (OOA)

L'évaluation de l'ordre de précision observé (OOA) permette de vérifier si l'erreur résultante de la discrétisation des EDP est réduite, en raffinant le maillage, avec le taux théoriquement prévu (Roy, 2005). En d'autre terme, le calcul de OOA peut nous donner un indice clair indiquant si le code converge vers la solution correcte ou non. Si la valeur calculée de OOA converge vers la valeur de l'ordre de précision formel (FOA), le code en question est considéré comme étant capable de reproduire le FOA de la méthode de discrétisation employée.

En ce qui suit, nous donnons un exemple concernant le calcul de FOA. Pour cela, nous avons utilisé l'équation d'énergie du modèle unidimensionnel du code SACATRI. FOA est déterminé par l'évaluation de l'erreur de troncature, et ce, par l'utilisation du développement en série de Taylor de la variable (ici nous prenons l'enthalpie  $h$ ).

Sans échanges transversaux d'énergie, l'équation d'énergie pour un sous-canal isolé, de section constante  $A$  est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v h A) = AQ \quad (5.3)$$

Afin de ne garder qu'une seule variable dans l'équation (5.3), nous supposons que la densité du fluide  $\rho$  est constante le long du sous-canal. D'après l'équation de continuité (3.12), la vitesse axiale  $v$  est uniforme le long du sous-canal. Donc l'équation (5.3) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = S \quad (5.4)$$

avec  $S_i$  est le terme source de l'équation aux dérivées partielles.

En utilisant le schéma centré, la discrétisation en différences finies de l'équation (5.4) conduit à la forme discrétisée suivante :

$$\frac{(h)_{j+1} - (h)_{j-1}}{2\Delta z} = S_j \quad (5.5)$$

Le développement en série de Taylor de  $(h)_{j+1}$  en  $(z_0 + \Delta z)$  et de  $(h)_{j-1}$  en  $(z_0 - \Delta z)$  autour de  $z_0$  est donné par les deux séries suivantes :

$$(h)_{j+1} = h(z_0 + \Delta z) = h(z_0) + \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_0 \Delta z + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \Big|_0 \frac{(\Delta z)^2}{2!} + \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \Big|_0 \frac{(\Delta z)^3}{3!} + O(\Delta z^4) \quad (5.6)$$

$$(h)_{j-1} = h(z_0 - \Delta z) = h(z_0) - \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_0 \Delta z + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \Big|_0 \frac{(\Delta z)^2}{2!} - \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \Big|_0 \frac{(\Delta z)^3}{3!} + O(\Delta z^4) \quad (5.7)$$

En substituant les deux expressions (5.6) et (5.7) dans l'équation discrétisée (5.5) on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{(h)_{j+1} - (h)_{j-1}}{2\Delta z} - \left[ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right] (\Delta z)^2 + O(\Delta z^4) = S. \quad (5.8)$$

Le terme  $\left[ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} \right] (\Delta z)^2 + O(\Delta z^4)$  représente l'erreur de troncature. Il tend vers 0 lorsque  $\Delta z$  tend vers 0.

Donc, FOA du schéma numérique utilisé est 2, car le terme représentant l'erreur de troncature contient le facteur  $(\Delta z)^2$ .

D'autre part, OOA est directement calculé à partir de la solution numérique. Si nous disposons de la solution analytique du problème, alors OOA est calculé à partir de l'erreur de discréétisation évaluée sur deux maillages de différentes résolutions. L'erreur de discréétisation est définie par la différence entre la solution numérique et la solution analytique. Dans ce cas, la procédure de calcul de OOA est résumée dans les étapes suivantes (Shyy, 2002) :

Considérons une série de forme ci-dessous, développée pour une variable  $\Phi$  sur une maille de taille  $q$  tel que :

$$\phi_a(x) = \phi_n(x; q) + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + \dots \quad (5.9)$$

Avec  $\Phi_a(x)$  est la solution exacte et  $\Phi_n(x; q)$  est la solution numérique basée sur  $q$ .

Alors, l'erreur de discréttization correspondante peut être donnée par :

$$\phi_a(x) - \phi_n(x; q) = a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + \dots \quad (5.10)$$

Par l'utilisation d'un schéma de discréttisation d'ordre 2, les termes d'ordre supérieur peuvent être négligés lorsque le nombre de nœuds tend vers l'infini (région asymptotique). Soit :

$$\phi_a(x) - \phi_n(x; q) = a_2 q^2 + O(q^3) \quad (5.11)$$

L'erreur de discréétisation, notée ici par  $\text{Err}$ , est donnée tout simplement par :

$$\text{Err} (x) = |\phi_a (x) - \phi_n (x; q)| = |a_2| q^2 \quad (5.12)$$

L'expression (5.12) peut être réécrite pour un maillage grossier  $q_1$  et un maillage fin  $q_2$  tel que :

$$\text{Err}_1 (x) = |\phi_a (x) - \phi_{n_1} (x; q_1)| = |a_2| q_1^2 \quad (5.13)$$

et

$$\text{Err}_2 (x) = |\phi_a (x) - \phi_{n_2} (x; q_2)| = |a_2| q_2^2 \quad (5.14)$$

En faisant le rapport entre l'expression (5.13) et (5.14) on obtient :

$$\frac{\text{Err}_2(x)}{\text{Err}_1(x)} = \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^r = (\bar{Q})^r \quad (5.15)$$

avec  $\bar{Q}$  est le facteur de raffinement du maillage.

A partir de la relation (5.15), nous déduisons que l'ordre de précision ( $r$ ) vaut 2. En général, l'ordre de précision observé peut être écrit sous la forme suivante :

$$r = \frac{\ln (\text{Err}_2(x)/\text{Err}_1(x))}{\ln(\bar{Q})} \quad (5.16)$$

Dans ce cas, où la solution analytique existe (générée par MMS), le calcul de OOA s'effectue en utilisant seulement deux mailles de différentes résolutions. Cependant, le test de vérification basé sur l'utilisation de MMS, combiné avec l'évaluation de l'ordre de précision, est facilement réalisable à une échelle réduite (dans le cas où nous simulons un nombre limité de sous-canaux).

Lorsque le nombre de sous-canaux est important (simulation du cœur entier du réacteur), l'application de MMS devient très compliquée et coûteuse en temps de calcul. Cela est dû, principalement, à la complication résultant de la gestion d'une manipulation symbolique énorme des termes sources et des différents termes de couplage entre les sous-canaux. Dans ce cas, même si la solution exacte du problème n'est pas accessible, l'évaluation de OOA peut s'effectuer seulement en se basant sur les solutions numériques basées sur trois maillages de différentes résolutions ( $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ ), et ce par l'élimination des solutions exactes correspondantes.

Par exemple, dans le cas où le maillage est raffiné par un facteur de 2 ( $\bar{Q} = 2$ ), la procédure de calcul de OOA est la suivante :

Soit  $\bar{Q}$  tel que :

$$\bar{Q} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_3}{q_2} = 2 \quad (5.17)$$

avec  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  représentent respectivement un maillage grossier, moyen et fin.

La relation (5.17) peut être réécrite dans une autre forme :

$$q_1 = f, q_2 = 2f, q_3 = (2)^2 f \quad (5.18)$$

Ensuite, en négligeant les termes d'ordre supérieur, les trois erreurs de discréétisation ( $Err_1$ ,  $Err_2$  et  $Err_3$ ) calculées respectivement sur les trois maillages  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont données par les expressions suivantes :

$$\phi_{n1}(x; q_1) = \phi_a(x) + a_2 f^r + \dots \quad (5.19)$$

$$\phi_{n2}(x; q_2) = \phi_a(x) + a_2 (2f)^r + \dots \quad (5.20)$$

$$\phi_{n3}(x; q_3) = \phi_a(x) + a_2 ((2)^2 f)^r + \dots \quad (5.21)$$

Par conséquent, en éliminant la solution analytique entre les trois équations, l'ordre de précision observé  $r$  s'écrit :

$$r = \frac{\ln [(\Phi_{n3} - \Phi_{n2}) / (\Phi_{n2} - \Phi_{n1})]}{\ln(\bar{Q})} \quad (5.22)$$

Lorsque nous disposons d'un maillage qui n'est pas raffiné par un facteur de 2, alors :

$$\bar{Q}_{12} = \frac{q_2}{q_1} \quad ; \quad \bar{Q}_{23} = \frac{q_3}{q_2} \quad (5.23)$$

avec  $\bar{Q}_{12} \neq \bar{Q}_{23}$

Dans ce cas, la détermination de l'ordre de précision observé  $r$  devient plus compliquée et s'effectue à travers la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{\Phi_{n3} - \Phi_{n2}}{\bar{Q}_{23}^r - 1} = \bar{Q}_{12}^r \left( \frac{\Phi_{n2} - \Phi_{n1}}{\bar{Q}_{12}^r - 1} \right) \quad (5.24)$$

Cette équation peut être facilement résolue par l'utilisation de la procédure itérative de Picard (Roy, 2005).

Finalement, nous résumons la procédure de l'application de MMS avec le test de vérification de l'ordre de précision en 5 étapes consécutives :

- Etape 1 : Choisir la forme de la solution fabriquée.
- Etape 2 : Remplacer la solution fabriquée dans les EDP afin d'obtenir la forme analytique des termes sources correspondants ainsi que les conditions aux limites associées.
- Etape 3 : Résoudre la forme discrétisée des EDP sur des maillages de différentes résolutions en se basant sur les termes sources et les conditions aux limites générées.
- Etape 4 : Evaluer l'erreur globale de discrétisation pour différents maillages.
- Etape 5 : Comparaison entre l'ordre de précision observé (OOA) et l'ordre de précision formel (FOA).

### **5.3.3 Procédure de vérification de la solution numérique**

Les activités concernant la « vérification de la solution numérique du code » s'intéressent essentiellement à détecter les erreurs numériques qui apparaissent lorsque nous résolvons numériquement les EDP. La vérification de la solution numérique du code dépend fortement de l'exactitude des activités de « vérification du code » établies précédemment.

Nous distinguons trois aspects principaux de la vérification de la solution numérique du code :

**Vérification des données d'entrée du code :** Le but de cette activité est de vérifier que l'on utilise les mêmes fichiers de données correspondant aux résultats de simulation, qu'il n'y a pas d'erreur concernant le choix et l'établissement du maillage, etc. Par exemple, ça revêt d'une grande utilité d'archiver les fichiers de données dans des fichiers séparés. De cette façon, nous pouvons vérifier si les données sont correctement implémentées dans le code.

**Vérification des données de sortie du code :** Pareillement, la vérification des fichiers de sortie est nécessaire afin de s'assurer que l'utilisateur travail avec les fichiers d'entrées convenables.

**Estimation de l'erreur numérique de la solution calculée par le code :** C'est une étape vitale vu qu'elle affecte la précision générale de la solution numérique.

### **5.3.4 Sources d'erreurs numériques**

La solution numérique peut être affectée par plusieurs sources d'erreurs numériques. Les erreurs les plus rencontrées sont :

1. Les erreurs d'arrondies (Round-off errors) : il s'agit des incertitudes numériques de nature informatique. L'arithmétique finie des calculateurs peut engendrer des incertitudes dans le modèle adopté dans le code. Par exemple, si le programmeur travaille avec une simple précision, le résultat d'une opération arithmétique sur une machine de calcul sera par exemple :

$$2.0 * (1.0 / 2.0) = 0.999999$$

ce qui ne reflète pas la valeur exacte qui vaut 1.0.

Les effets négatifs de ces incertitudes peuvent être atténués en utilisant plus de chiffres significatifs dans le calcul. En d'autre terme, il est préférable de travailler avec une double précision et d'utiliser des machines ayant une architecture de *64-bit*.

2. Les erreurs dues à la convergence du processus itératif (iterative convergence error). Ces erreurs existent souvent lors de la résolution itérative des EDP. Ces erreurs dépendent de la tolérance fixée par l'utilisateur.
3. Les erreurs résultant de la discréétisation des EDP.

Pour l'application que nous avons développée, nous considérons que les erreurs de discréétisation puisque les deux premières familles d'erreurs sont souvent négligées

### 5.3.5 Erreur de discréétisation

L'erreur de discréétisation est définie par la différence entre la solution numérique et la solution exacte des EDP. Ces erreurs s'imposent à cause de la conversion des équations différentielles à un système algébrique d'équations (procédure de discréétisation). Cette procédure fait parvenir des termes ou des coefficients de discréétisation tel que la taille de la maille  $\Delta z$  ou bien en régime transitoire le pas du temps  $\Delta t$ .

L'erreur de discréétisation relative (RDE) est donnée par la différence normalisée entre la solution numérique et la solution exacte :

$$RDE_{\phi} = \frac{\phi_n - \phi_a}{\phi_a} \quad (5.25)$$

avec  $\Phi$  représente les différentes variables du problème.

Si l'ordre de précision formel est égal à 2 ( $r = 2$ ) et si le maillage est raffiné par un facteur de 2 ( $\bar{Q} = 2$ ), l'erreur de discréétisation pour quatre maillages de différentes résolutions, doit obéir, dans la région asymptotique du maillage, à la relation suivante :

$$RDE_{q_1\Phi} = RDE_{q_2\Phi} (\bar{Q})^r = RDE_{q_3\Phi} (2\bar{Q})^r = RDE_{q_4\Phi} (4\bar{Q})^r \quad (5.26)$$

Dans le cas où nous ne disposons pas de solution analytique, et si le schéma numérique utilisé est du second ordre avec  $\overline{Q} = 2$ , nous pouvons employer l'extrapolation de Richardson (Roy, 2005). Cette extrapolation peut être utilisée pour estimer une solution analytique ( $\Phi_a$ ) aux EDP telle que :

$$\phi_a = \phi_2 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{3} \quad (5.27)$$

Avec  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont les solutions numériques qui correspondent respectivement au maillage grossier et au maillage fin. La solution analytique  $\Phi_a$  est une solution de troisième ordre de précision.

La forme généralisée de l'extrapolation de Richardson est donnée par :

$$\phi_a = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\overline{Q}^r - 1} \quad (5.28)$$

En utilisant les deux équations (5.25) et (5.28), l'expression de l'estimateur de l'erreur de discréétisation (par l'utilisation de l'extrapolation de Richardson) est donnée par la relation suivante :

$$RDE_{1\phi} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_a(\overline{Q}^r - 1)} \quad (5.29)$$

## 5.4 Application à la vérification du code SACATRI

Dans cette section, nous détaillerons la procédure que nous avons envisagée pour vérifier le code SACATRI. En effet, la procédure de vérification que nous proposons ici, peut être appliquée généralement sur les codes thermohydrauliques basés sur l'approche sous-canaux. Egalement, nous mettons l'accent sur l'application des différentes techniques, de vérification du code et de la vérification de la solution numérique, que nous avons définies antérieurement.

Par ailleurs, nous avons appliqué ces activités de vérification sur le code SACATRI durant la phase de développement du code. Ceci nous a permis de surmonter progressivement les difficultés et de s'arrêter sur les divers problèmes (physiques et numériques) qui se révèlent lors de la modélisation. Par conséquent, en ce qui suit, nous décrirons la vérification du code SACATRI selon l'ordre chronologique de son développement et en incrémentant régulièrement les difficultés à chaque phase de l'élaboration de ce code. Ainsi, nous avons subdivisé la procédure de vérification en deux principaux stades de difficultés croissantes.

Aussi, nous tenons à signaler que pour la vérification, nous avons utilisé le modèle thermohydraulique mais sans tenir en considération les phénomènes turbulents introduits dans le modèle établi précédemment. En effet, les termes décrivant le mélange turbulent et le transport latéral de masse (dû à la différence de pression entre les sous-canaux) ont quasiment la même forme. Donc, pour ne pas alourdir le processus de vérification, surtout lors de l'utilisation de MMS, nous avons opté pour cette simplification.

Dans le premier stade, nous considérons le modèle unidimensionnel du code SACATRI. A ce niveau, il n'y a aucun flux de masse ou d'énergie transversal. En ce qui concerne le deuxième stade, nous l'avons subdivisé en trois étapes. Dans la première, nous supposons un sous-canal triangulaire isolé avec des vitesses transversales imposées. Dans ce cas, nous n'avons pas besoin d'utiliser l'équation de conservation de la quantité de mouvement transversale. Dans la deuxième étape, nous prenons un sous-canal triangulaire central, entouré par trois autres sous-canaux adjacents. Dans ce cas, l'échange de masse et d'énergie entre les sous-canaux voisins est pris en considération. Dans la dernière étape, nous vérifierons le code SACATRI dans un cas plus proche de la réalité et ce, par la simulation thermohydraulique du fluide réfrigérant à travers un réseau de sous-canaux, en tenant compte des données physiques et géométriques réelles.

### 5.4.1 Premier étape de vérification : Cas d'un sous-canal isolé

Dans cette première étape de vérification, nous traiterons le modèle unidimensionnel du code SACATRI. D'après les équations de conservation de ce modèle (détailé dans le chapitre 3), il apparaît que l'application de MMS n'est pas une nécessité, puisque nous pouvons facilement trouver une solution analytique du débit massique et de l'enthalpie  $h$  (ou la température  $T$ ).

Selon l'équation de continuité, le débit massique reste constant le long du sous-canal  $i$  de longueur  $L$  et de section uniforme  $A_i$ . Soit :

$$\dot{m}_i(z = 0) = \dot{m}_i(z = L) = cte \quad (5.30)$$

Donc, si nous supposons une valeur constante donnée du produit  $(\rho_i v_i A_i)$ , nous pouvons directement trouver une solution analytique exacte du champ d'enthalpie  $h$ .

En supposant que la puissance dissipée dans le sous-canal  $i$  est constante ( $Q = cst$ ), la solution analytique de  $h$  est une fonction linéaire de  $z$  tel que :

$$h_i = (S_i) z + b \quad (5.31)$$

avec  $b$  est une constante déterminée à partir des conditions aux limites (valeur de  $h$  à l'entrée du sous-canal) et  $S_i$  est le terme source.

Dans le tableau (5.1) nous représentons l'erreur relative de discréétisation ( $RDE_\Phi$ ) et l'ordre de précision observé ( $r_\Phi$ ), calculés pour l'enthalpie ( $h$ ) et le débit massique ( $\dot{m}$ ). Nous avons utilisé quatre maillages de résolutions  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  et  $N_4$  de telle façon que le maillage est raffiné par un facteur de 2 :

$$Q = \frac{N_{\text{maillage fin}}}{N_{\text{maillage grossier}}} \quad (5.32)$$

TAB. 5.1 – L'erreur relative de discréétisation ( $RDE_\Phi$ ) [%] et l'ordre de précision observé  $r_\Phi$  calculé pour l'enthalpie ( $h$ ) et le débit massique ( $\dot{m}$ )

Maillage	Enthalpie $h$				Débit massique ( $\dot{m}$ )			
	$RDE_h$	$N_{\text{maillage fin}}$	$N_{\text{maillage grossier}}$	$r_\Phi$	$RDE_{\dot{m}}$	$N_{\text{maillage fin}}$	$N_{\text{maillage grossier}}$	$r_{\dot{m}}$
20	6.8E-03	40/20	—	1.99	1.7E-06	40/20	—	1.98
40	1.7E-03	80/40	—	1.99	4.3E-07	80/40	—	2.1
80	4.3E-04	160/80	—	2.1	1.08E-07	160/80	—	2.00
160	1.07E-04	—	—	—	2.7E-08	—	—	—

Nous remarquons, d'après le tableau (5.1), que la variation de l'erreur relative de discréétisation, calculée pour  $h$  et  $\dot{m}$ , obéit à la relation (5.26). Ceci ne sera vrai que si le code SACATRI pourrait reproduire l'ordre de précision formel de la méthode numérique utilisée pour discréétiser les EDP du modèle (dans notre cas FOA est égal à 2). Ce qui est bien le cas, puisque d'après le tableau (5.1), l'ordre de précision observé, calculé pour  $h$  et  $(\dot{m})$ , est très proche de FOA. Ceci est justifié par le fait que nous avons utilisé le schéma centré d'ordre 2 dans tous les noeuds du domaine de calcul.

En effet, le problème est purement convectif ; les conditions aux limites sont appliquées seulement à l'entrée du sous-canal. Donc, pour toutes les équations du modèle, le schéma centré peut être appliqué facilement sur tous les noeuds internes du domaine de calcul, hormis le dernier noeud qui nécessite un traitement spécial par rapport aux autres noeuds.

Evidement, l'application du schéma centré au dernier noeud, qui correspond à la sortie du sous-canal ( $z = L$ ), requiert un noeud additionnel situé à l'extérieur du domaine de calcul. Par conséquent, la solution la plus convenable consiste à utiliser le schéma de

différence finie en arrière (schéma du premier ordre). Malgré que ce choix ne cause aucun problème de convergence, il reste insuffisant du point de vu précision numérique, puisque, dans ce cas, l'ordre de précision observé (OOA), moyenné sur tout le domaine de calcul, sera perturbé. Dans ce cas, le FOA correspondant sera difficilement évalué.

Pour palier à ce problème et appliqué le schéma centré au dernier nœud  $N$ , nous avons proposé d'utiliser un nœud auxiliaire, situé au milieu, entre le nœud  $N - 1$  et le nœud  $N$ , sur lequel nous appliquons le schéma de différence finie centré (figure 5.1).

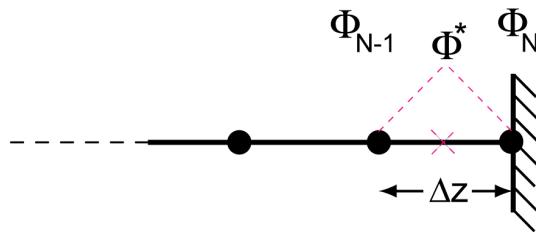


FIG. 5.1 – Application du schéma de différence finie centré au dernier nœud  $N$  du domaine de calcul

Considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = S \quad (5.33)$$

que nous voulons résoudre sur le nœud auxiliaire, tel que  $\Phi$  et  $S$  sont respectivement la variable et le second membre.

Par l'application du schéma de différence finie centré au nœud auxiliaire, l'équation (5.33) sous la forme discrétisée est donnée par :

$$\left( \frac{1}{\Delta z} \right) \Phi_N - \left( \frac{1}{\Delta z} \right) \Phi_{N-1} = S^* \quad (5.34)$$

Le second membre  $S^*$  peut être calculé au nœud auxiliaire par une simple interpolation linéaire :

$$S^* = \frac{S_N + S_{N-1}}{2} \quad (5.35)$$

De cette manière, nous obtenons une équation permettant de calculer  $\Phi$  au nœud  $N$  en fonction de  $\Phi_{N-1}$ ,  $S_N$  et  $S_{N-1}$ .

Les analyses thermohydrauliques des canaux chauds des réacteurs nucléaires revêtent d'une grande importance dans les études de sûreté. Ceci se traduit par l'abondance, dans

la littérature, des études thermohydrauliques de ce genre moyennant des codes unidimensionnels. Huda (2006) a largement investi dans la simulation thermohydraulique du canal chaud du réacteur TRIGA MARK II de puissance 3MW (installé et opéré au Bangladesh et refroidi par convection naturelle). Il a utilisé, dans ces travaux, le code NCTRIGA pour prévoir les différents paramètres thermohydrauliques du canal chaud (vitesse, débit massique, température, etc).

Dans ce contexte, nous avons opté, à ce niveau de vérification, à la comparaison de nos résultats de simulation obtenus via le code SACATRI-1D à ceux réalisés par Huda via le code NCTRIGA. Nous rappelons ici, qu'il s'agit d'une activité de vérification moins rigoureuse (comparaison code-code), mais qui peut être complémentaire aux autres activités de vérification que nous avons effectuées. Puisque le code NCTRIGA donne des résultats satisfaisants lorsqu'il est appliqué sur les réacteurs de type TRIGA (voir chapitre 2), une comparaison distinctive, nous donnera une idée concernant la précision fournie par SACATRI-1D vis-à-vis d'autres codes de même catégorie.

Le tableau (5.2) résume quelques caractéristiques physiques et géométriques du canal chaud du réacteur TRIGA MARK II du Bangladesh, que nous avons utilisé dans le calcul.

TAB. 5.2 – Quelques caractéristiques physiques et géométriques du canal chaud du réacteur TRIGA MARK II du Bangladesh

Elément combustible	20% en U et un enrichissement de 19.7%
Gaine	Acier inoxydable 304 L Réflecteur
Graphite Température d'entrée (°C)	40.6
Longueur active du combustible (m)	0.381
Rayon du combustible (m)	0.01875
Rayon extérieur de la gaine (m)	0.0187706
Pitch (m)	0.0435
Longueur total du canal (m)	0.703070

Les résultats de simulation obtenus par le code SACATRI comparés à ceux claculés par NCTRIGA, pour différents niveaux de puissance, sont représentés dans le tableau (5.3). La température d'entrée de l'eau est supposée constante (40°C) quelque soit le niveau de puissance considéré. Nous remarquons que les résultats obtenus par le code SACATRI sont proches de ceux calculés par le code NCTRIGA. Les résultats de comparaison montre que la différence relative entre les résultats des deux codes ne dépasse pas 1.5% pour la vitesse, 0.3% pour la température et 1% pour le débit massique.

TAB. 5.3 – Comparaison entre les résultats de simulation obtenus par le code SACATRI et ceux produits par le code NCTRIGA

Code	Puissance (kW)	Vitesse		Débit kg/sec	Température (°C)	
		Entrée	sortie		Entrée	Sortie
NCTRIGA	500	0.22305	0.22595	0.07745	40.0	68.5
	300	0.18397	0.18558	0.06388	40.0	60.7
	100	0.12269	0.12318	0.04261	40.0	50.4
SACATRI	500	0.22250	0.22616	0.07769	40.0	68.55
	300	0.18226	0.18423	0.06364	40.0	60.91
	100	0.12087	0.12144	0.04220	40.0	50.51

Les écarts observés entre les deux codes peuvent être dus aux différentes approximations et corrélations utilisées dans chaque code, telles que les propriétés physiques de l'eau (la densité, la chaleur spécifique, le coefficient de dilatation thermique, etc.).

#### 5.4.2 Deuxième étape de vérification

Dans la deuxième étape de vérification, nous nous penchons à vérifier le modèle thermohydraulique tridimensionnel du code SACATRI.

Nous rappelons ici les quatres équations du modèle thermohydraulique sans tenir compte des phénomènes turbulent :

**1) Equation de continuité :**

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} \rho_{ik} w_{ik} \Delta x_{ik} = 0 \quad (5.36)$$

**2) Equation de conservation de quantité de mouvement axiale :**

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v v)_i - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho_{ik} w_{ik} v_{ik}^{**}) \frac{\Delta x_{ik}}{A_i} = -\frac{\partial P_i}{\partial z} - g(\rho_i - \rho_0) - \tilde{F} \left( \frac{1}{2} \rho_i |v_i| v_i \right) \quad (5.37)$$

**3) Equation de conservation de quantité de mouvement transversale :**

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{ik}^* w_{ik}) v_{ik}^* = \frac{P_i - P_k}{\Delta y_{ik}} - \frac{\xi_{ik}}{2 \Delta x_{ik}} \rho_{ik}^* |w_{ik}| w_{ik} \quad (5.38)$$

#### 4) Equation de conservation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v h A)_i - \sum_{k=1}^{Nk} (\rho w \Delta x)_{ik} h_{ik}^* = Q_i \quad (5.39)$$

- Premier test de vérification : cas d'un sous-canal isolé avec des vitesses transversales imposées :

Considérons un sous-canal  $i$ , de géométrie triangulaire et qui reçoit un flux de masse latéral à travers ces trois interfaces (figure 5.2) tel que :

$$w_{i1}(z) = w_{i2}(z) = w_{i3}(z) = w(z); (w > 0) \quad (5.40)$$

Dans ce cas, l'équation de quantité de mouvement transversale ne sera pas vérifiée. Pour simplifier le problème, nous avons utilisé l'hypothèse de Boussinesq. Cette approche implique que la densité du fluide ( $\rho$ ) est supposée constante, sauf dans le terme représentant les forces d'Archimède figurant dans l'équation de quantité de mouvement axiale. La densité du fluide  $\rho$  s'écrit sous la forme :

$$\rho = \rho_0 + \beta T \quad (5.41)$$

avec  $\rho_0$  est la densité du fluide,  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique et  $T$  est la température du fluide.

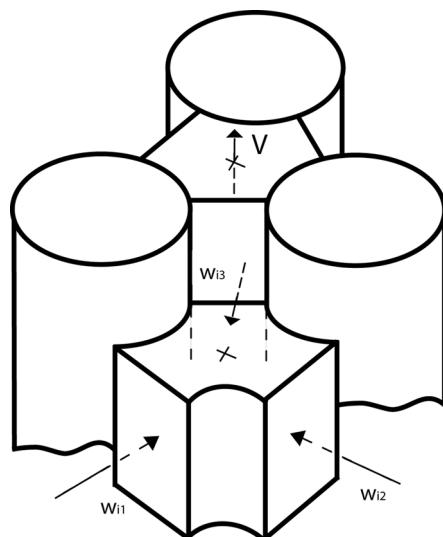


FIG. 5.2 – Schéma d'un sous-canal isolé avec vitesses transversales imposées

Pour générer des solutions analytiques exactes du problème, nous avons appliqué la méthode de solutions fabriquées (MMS) pour toutes les équations thermohydrauliques du modèle. Dans ce cas, les solutions fabriquées choisies sont les suivantes :

Pour l'enthalpie  $h$  et la vitesse axiale  $v$ , nous avons choisi des expressions analytiques sous la forme :

$$h(z) = h_0 e^{\alpha z} \quad (5.42)$$

$$v(z) = v_0 + b \sin(\omega z) \quad (5.43)$$

Les valeurs de  $h_0$  et de  $v_0$  représentent l'enthalpie et la vitesse du fluide à l'entrée du sous-canal ( $z = 0$ ). Les constantes  $\alpha$ ,  $b$  et  $\omega$  sont choisies de telle façon à tenir compte de la simplicité de la forme analytique des solutions fabriquées et en même temps, de garder le même degré de complexité après dérivation.

La vitesse transversale doit satisfaire l'équation de conservation de masse. En remplaçant  $v(z)$ , donné par la relation (5.43), dans l'équation de continuité (5.36), nous obtenons la forme analytique de la vitesse transversale :

$$w_{ik}(z) = \frac{A b \omega}{3 \Delta x_{ik}} \cos(\omega z) \quad (5.44)$$

En substituant les solutions fabriquées dans l'équation d'énergie (5.39), nous pouvons facilement calculer la forme analytique du terme source  $Q$ . Donc, après une manipulation symbolique, on obtient :

$$Q(z) = \rho A \alpha h_0 (v_0 + b \sin(\omega z)) e^{\alpha z} \quad (5.45)$$

La forme analytique du champ de pression est obtenue par l'intégration de l'équation de conservation de quantité de mouvement axiale (5.37). Ici, nous avons représenté le coefficient de résistance hydraulique  $\tilde{F}$  par une fonction exponentielle de la forme :

$$\tilde{F}(z) = e^{\lambda z} \quad (5.46)$$

avec  $\lambda$  est un paramètre constant donné.

Donc, la forme analytique du champ de pression obtenu est donnée par :

$$P(z) = -2\rho b (v_0 + \frac{b}{2} \sin(\omega z)) \sin(\omega z) - \left( \frac{g\beta}{\alpha C_p} \right) h(z) - \frac{\rho A}{2} \int e^{\lambda z} v^2(z) dz + \rho \beta \omega \int v(z) \cos(\omega z) dz + P_0 \quad (5.47)$$

$P_0$  est la constante d'intégration. Sa valeur est déterminée à partir des conditions aux limites.

Finalement, le présent test de vérification peut être décrit par :

- Les conditions aux limites,
- Le terme source de l'équation de conservation d'énergie  $Q$ ,
- La forme analytique de la vitesse transversale  $w$ .

Donc, le benchmark associé sera défini comme suit :

•  $z = 0 : h = h_0$  et  $v = v_0$

•  $0 \leq z \leq L :$

$$w_{ik}(z) = \frac{Ab\omega}{3\Delta x_{ik}} \cos(\omega z); (k = 1, 2, 3)$$

et

$$Q(z) = \rho A \alpha h_0 (v_0 + b \sin(\omega z)) e^{\alpha z}$$

Finalement, les conditions aux limites  $h_0$  et  $v_0$  ainsi que la forme analytique de  $Q$  et de  $w$  sont incorporées dans le code SACATRI. Le tableau (5.4) résume les différents paramètres utilisés dans le présent test de vérification.

L'estimation de l'erreur numérique relative de discréétisation (RDE) pour chaque variable du problème, a été effectuée pour des maillages réguliers, suivant la direction axiale. Le maillage est raffiné par un facteur de 2. Les différents maillages utilisés durant cette simulation sont représentés dans le tableau (5.5). L'espacement du maillage  $\eta$  représente le rapport entre le maillage fin et le maillage grossier ( $\frac{N_5}{N_m}$  avec  $m = 4, 3, 2, 1$ ) telle que la résolution la plus fine du maillage correspond à la valeur minimal de  $\eta$ .

TAB. 5.4 – Données relatives au premier test de vérification du modèle tridimensionnel du code SACATRI

$L$ (m)	0.7
$h_0$ (kJ/kg)	134.11
$v_0$ (m/s)	0.1
$A(m^2)$	2.67E-4
$\Delta x_{ik}$ (m)	0.0435
b	0.1
$\omega$	2.2341
$\alpha$	60
$\beta$	6.73E-2

TAB. 5.5 – Les différents maillages utilisés durant le premier test de vérification du modèle tridimensionnel du code SACATRI

Nom du maillage	Nombre de noeuds du maillage	Espacement du maillage ( $\eta$ )
$N_1$	20	$(N_5/N_1)=16$
$N_2$	40	$(N_5/N_2)=8$
$N_3$	80	$(N_5/N_3)=4$
$N_4$	160	$(N_5/N_4)=2$
$N_5$	320	—

Le tableau (5.6) et la figure (5.3) représentent les résultats concernant l'erreur relative de discréétisation ( $RDE_\Phi$ ) ainsi que l'ordre de précision observé ( $r_\Phi$ ), obtenus pour les différentes variables ( $h$ ,  $v$  et  $P$ ). La valeur de  $r_\Phi$  est moyenné sur tous les noeuds du domaine.

TAB. 5.6 – Erreur de discréétisation relative [%] calculée pour l'enthalpie, la vitesse axiale et la pression pour différentes maillages

Maillage	$RDE_h$	$RDE_v$	$RDE_p$
20	1.5110E-01	4.0295E-02	2.9225E-01
40	3.7829E-02	9.6414E-03	7.2622E-02
80	9.4559E-02	2.3591E-03	1.8058E-02
160	2.3629E-03	5.8460E-04	4.5132E-03

Les profils obtenus de  $h$ ,  $v$  et  $P$ , comparés avec les solutions analytiques proposées, sont représentés sur les figures (5.4), (5.5) et (5.6). Nous remarquons que la solution numérique est en très bon accord avec la solution analytique et ce, pour les différents maillages utilisées. Pratiquement, aucune différence entre la solution analytique et la solution numérique ne peut être notée sur les figures. Ceci est expliqué par le fait que, même pour un maillage étiré ( $N_1 = 20$ ), l'erreur de discréétisation relative, pour toutes les variables considérées, est inférieure à 0.3% (tableau 5.6). Cette erreur est réduite systématiquement lorsque le nombre de noeuds augmente.

D'après la figure (5.3), l'ordre de précision observé calculé à partir de la solution numérique (moyenné sur tous les noeuds du domaine de calcul) converge vers la valeur théorique (FOA=2) dans la région assymptotique (lorsque  $\eta$  diminue). Nous remarquons que pour la pression, l'ordre de précision observé reste légèrement inférieure à 2 même dans la région assymptotique. En effet, pour l'équation de conservation d'énergie et l'équation de conservation de quantité de mouvement axiale, nous avons appliqué le schéma centré

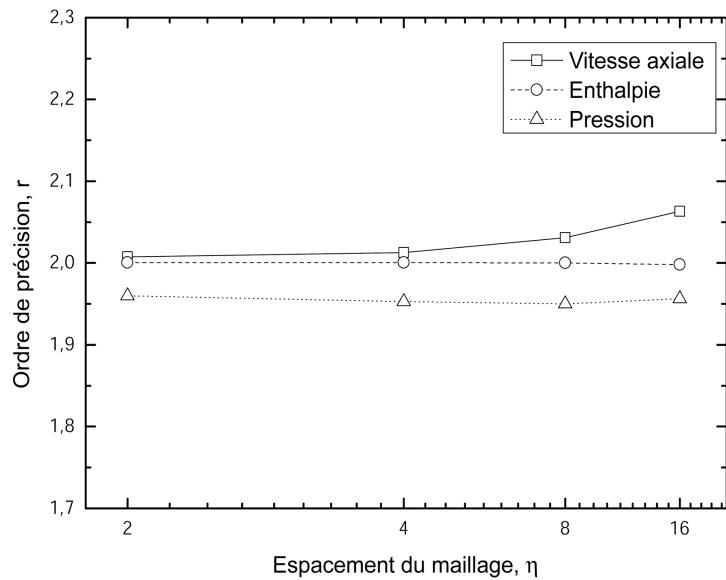


FIG. 5.3 – Evaluation de l'ordre de précision observé en fonction de l'espacement du maillage  $\eta$

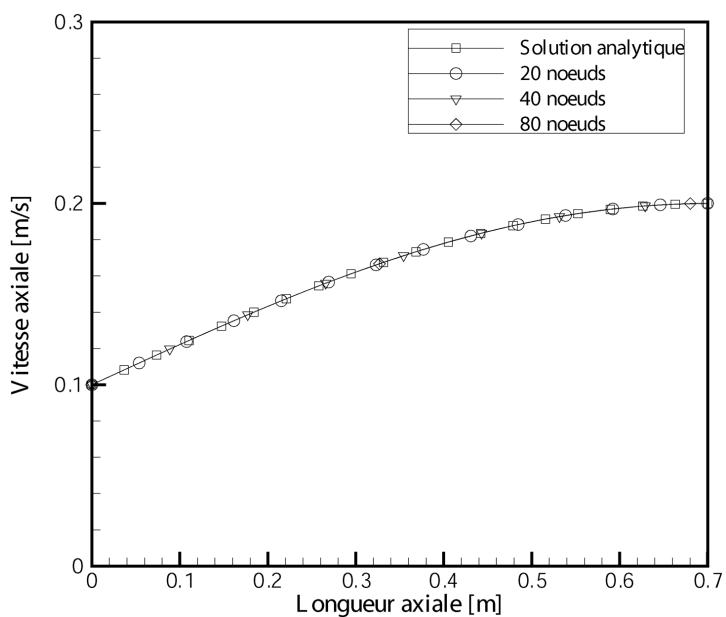


FIG. 5.4 – Profil de la vitesse axiale comparé à la solution analytique pour différents maillages

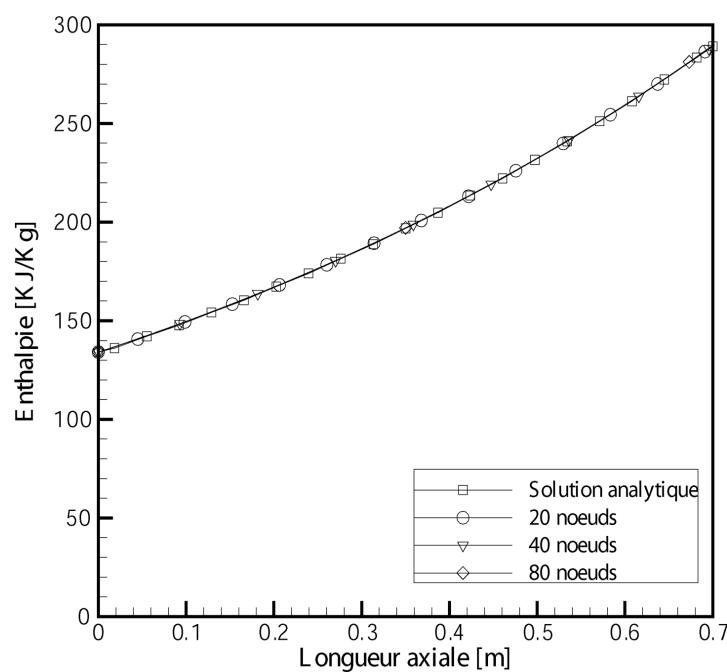


FIG. 5.5 – Profil de l'enthalpie comparé à la solution analytique pour différents maillages

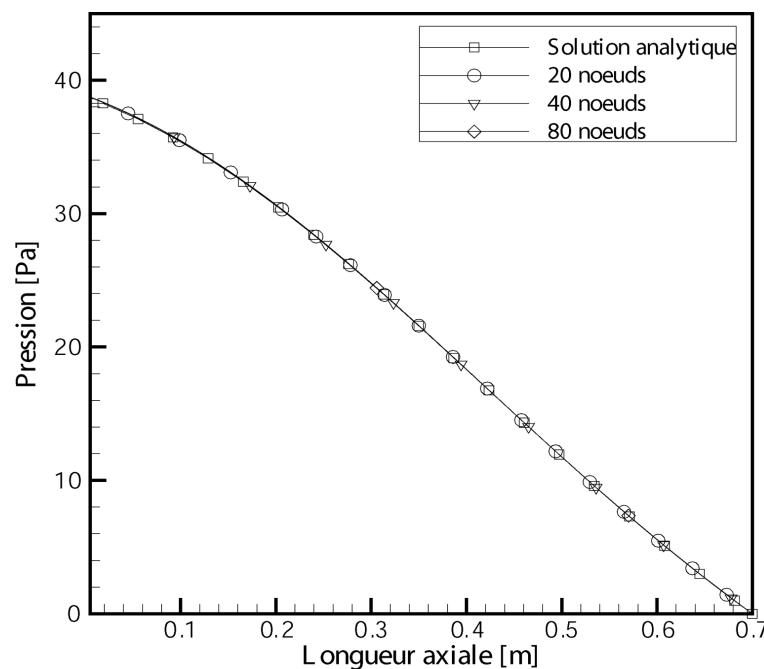


FIG. 5.6 – Profil de la pression comparé à la solution analytique pour différents maillages

(d'ordre 2) sur tous les noeuds du domaine de calcul y compris le dernier, situé à la sortie du sous-canal ( $z = L$ ).

Ici, nous avons utilisé le même traitement, concernant l'application du schéma centré au dernier noeud, détaillé dans le test de vérification précédent (section 5.4.1).

Cependant, pour l'équation de correction de pression qui n'est pas une des équations gouvernantes du problème, les conditions aux limites associées ne peuvent pas être déterminées explicitement à partir du problème physique. Or, à l'entrée du sous-canal, la vitesse axiale est supposée connue. Elle est calculée à partir de la chute de pression. Ceci implique qu'il n'est pas nécessaire de corriger cette vitesse au premier noeud.

Donc pour  $z = 0$ , la condition imposée sur la correction de pression s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial z} = 0 \quad (5.48)$$

Cette condition est implémentée dans le code SACATRI par un schéma de différence finie en avant, car l'utilisation du schéma centré cause des problèmes de convergence du processus itératif. Par conséquent, l'ordre de précision observé, calculé au premier noeud, est égal à 1. Donc, nous avons un ordre de précision qui vaut 1 au premier noeud, et vaut 2 sur le reste des noeuds. Ceci a une influence sur la valeur moyenne de l'ordre de précision observé calculé pour l'équation de correction de pression. Cet effet est amorti dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale qui n'utilise que le gradient de pression (explicitement connu à l'entrée du sous-canal).

- **Deuxième test de vérification : Sous-canal triangulaire entouré par trois sous-canaux**

Dans ce test de vérification, nous considérons un sous-canal  $i$ , de géométrie triangulaire, entouré par trois autres sous-canaux  $k$  ( $k = 2, 3, 4$ ). Ce test permet de tester les échanges de masse et d'énergie entre le sous-canal central et les sous-canaux adjacents via l'équation de conservation de quantité de mouvement transversale. La configuration étudiée est représentée sur la figure (5.7). Pour simplifier, nous supposons que les trois sous-canaux entourant le sous-canal central sont soumis aux mêmes conditions. Aussi, nous supposons qu'aucun flux de masse ni d'énergie ne traverse leurs surfaces qui les séparent du milieu extérieur. Les simplifications adoptées n'affectent pas la qualité du test de vérification numérique envisagé, puisque les solutions fabriquées proposées permettent d'exercer les différents termes des EDP.

Nous commençons par la génération des solutions analytiques du problème. Pour cela, nous appliquons la méthode des solutions fabriquées.

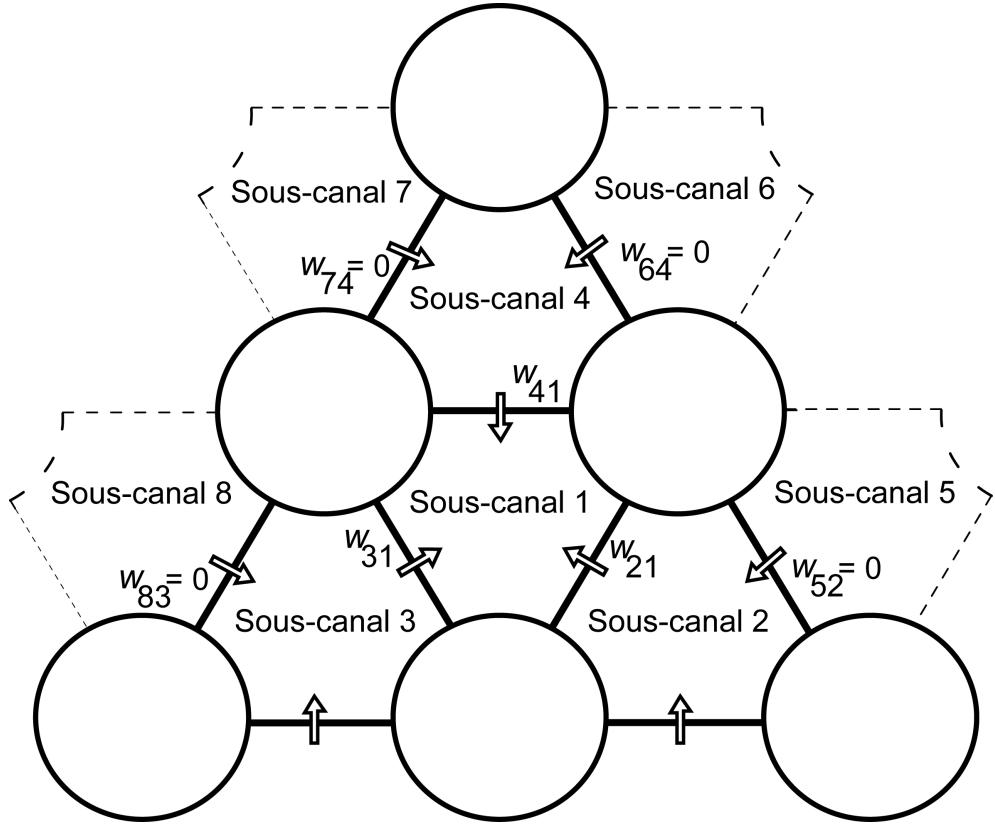


FIG. 5.7 – Arrangement de quatre sous-canaux

a) Pour le sous-canal central  $i$

Pour le sous-canal central  $i$ , nous proposons les solutions analytiques suivantes pour l'enthalpie et la vitesse transversale :

$$h_i(z) = h_0 e^{\alpha z} \quad (5.49)$$

$$w_{ik}(z) = \frac{A}{3\Delta x} e^{-kz} \cos(\omega z) \quad (5.50)$$

En substituant les solutions analytiques choisies (5.49) et (5.50) dans l'équation de continuité (5.36) et l'équation de conservation d'énergie (5.39), nous pouvons déterminer la forme analytique de la vitesse axiale  $v$  et du terme source  $Q$ . Soit :

$$v_i(z) = -\frac{e^{-kz}}{k^2 + \omega^2} (k \cos(\omega z) - \omega \sin(\omega z)) + v_0 \quad (5.51)$$

$$Q_i(z) = \rho A \left[ \alpha h_0 v_i(z) e^{\alpha z} + \left( h_0 e^{(\alpha-k)z} - h'_0 e^{(\alpha'-k)z} \right) \cos(\omega z) \right] \quad (5.52)$$

**(b) Pour les sous-canaux périphériques  $k$  ( $k = 2, 3$  et  $4$ )**

Puisque le sous-canal central  $i$  reçoit le flux massique à partir des sous-canaux voisins  $k$ , alors nous supposons que  $w_{ik} = -w_{ki}$ . Donc, à partir de l'expression (5.50) nous avons :

$$w_{ki}(z) = -\frac{A}{3\Delta x} e^{-kz} \cos(\omega z) \quad (5.53)$$

En introduisant cette équation dans l'équation de continuité (5.36), nous trouvons l'expression analytique de la vitesse axiale  $v$  :

$$v_k(z) = \frac{e^{-kz}}{3(k^2 + \omega^2)} (k \cos(\omega z) - \omega \sin(\omega z)) + v'_0 \quad (5.54)$$

La forme analytique proposée pour l'enthalpie est donnée par :

$$h_k(z) = h'_0 e^{\alpha' z} \quad (5.55)$$

En remplaçant les solutions analytiques choisies dans l'équation de conservation d'énergie (5.39), on obtient le terme source pour sous-canaux 2, 3 et 4 :

$$Q_k(z) = \rho A \alpha' h'_0 v_k(z) e^{\alpha' z} \quad (5.56)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, le débit massique transversal est supposé dirigé des sous-canaux  $k$  vers le sous-canal  $i$ . En effet, puisque les SC ont la même section  $A_i$ , et en se basant sur les lois physiques, la pression dans le sous-canal central doit être inférieure à la pression dans les sous-canaux voisins.

Puisque les solutions analytiques dans les sous-canaux voisins et le sous-canal central sont déterminées séparément sans utilisation des équations de conservation de quantité de mouvement transversale, donc il n'y a aucune condition qui permet de vérifier que le champ de pression dans le sous-canal  $i$  est inférieur à la pression dans les sous-canaux voisins (pour que le flux de masse passe des sous-canaux  $k$  vers le sous-canal central  $i$ ).

En d'autre terme, pour deux valeurs différentes du paramètre  $\xi$ , qui figure uniquement dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement transversale, nous obtenons deux solutions différentes. Par conséquent, pour fermer le système d'équation, il faut spécifier la valeur exacte de  $\xi$  qui correspond à nos solutions analytiques déjà déterminées. En effet, dans le problème réel, pour fermer le système d'équations thermohydrauliques, nous utilisons les différentes corrélations décrivant le coefficient de frottement et les résistances hydrauliques dues au changement brusque de la section de passage de l'écoulement.

Pour remédier à ce problème, nous avons proposé de déterminer La forme analytique de  $\xi$  à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement transversale (5.38).

Puisque les équations thermohydrauliques sont résolues via une procédure itérative, il est préférable, du point de vue convergence, que  $\xi$  soit actualisée à chaque itération. Donc, en se basant sur l'équation (5.38), nous obtenons la forme analytique suivante de  $\xi$  :

$$\xi_{ik}(z) = \frac{1}{w_{ik}^*} \left[ \frac{2 \Delta x_{ik}}{\rho |w_{ik}|} \left( \frac{P_i - P_k}{\Delta y_{ik}} - \frac{\partial (\rho v^* w)_{ik}}{\partial z} \right) \right] \quad (5.57)$$

Parmi les termes de cette expression, seule  $w^*$  est actualisée durant la procédure itérative. Les différents termes figurant entre les deux crochets de l'équation (5.57) sont établis à partir des formes analytiques des différentes variables. La valeur de  $\xi$  ainsi obtenue n'a aucune signification physique, car elle est utilisée seulement pour balancer l'équation de conservation de la quantité de mouvement transversale (5.38).

Les différents paramètres utilisés dans ce test de vérification sont présentés dans le tableau (5.7).

TAB. 5.7 – Les paramètres utilisés dans le test de vérification du code SACATRI dans le cas d'un sous-canal triangulaire entouré de trois sous-canaux

$h_0(\text{kJ/kg})$	134.11
$h'_0(\text{kJ/kg})$	157.89
$v_0(\text{m/s})$	0.3
$v'_0(\text{m/s})$	0.1
$b$	2
$\omega$	2.2341
$\alpha$	1.1
$\alpha'$	0.9
$k$	5

Les figures (5.8)-(5.11), illustrent, pour différents maillages, le profil des différents paramètres thermohydrauliques du problème ( $v, w, P, h$ ) obtenus numériquement. D'après ces figures, nous remarquons que l'accord observé entre les solutions numériques et les solutions analytiques est satisfaisant même pour un maillage étiré ( $N = 20$ ).

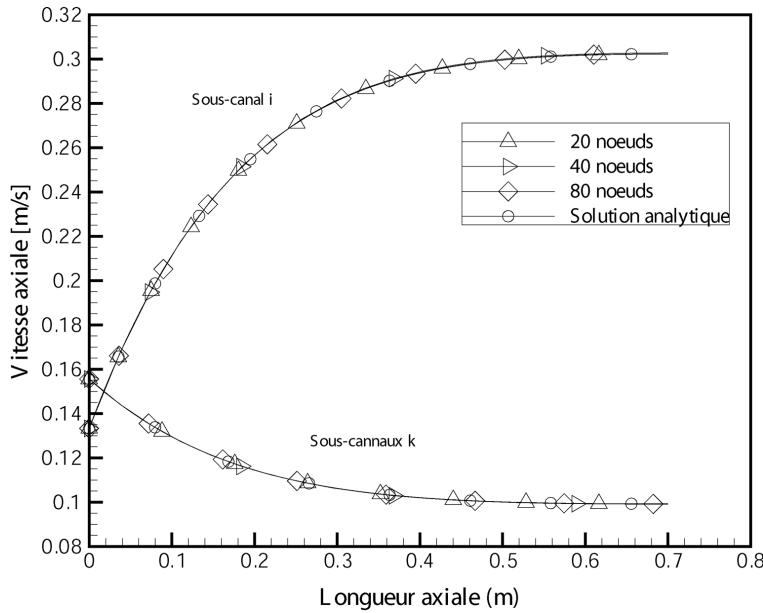


FIG. 5.8 – Profil de la vitesse axiale dans le sous-canal *i* et les sous-canaux *k* comparé à la solution analytique pour différents nombres de nœuds

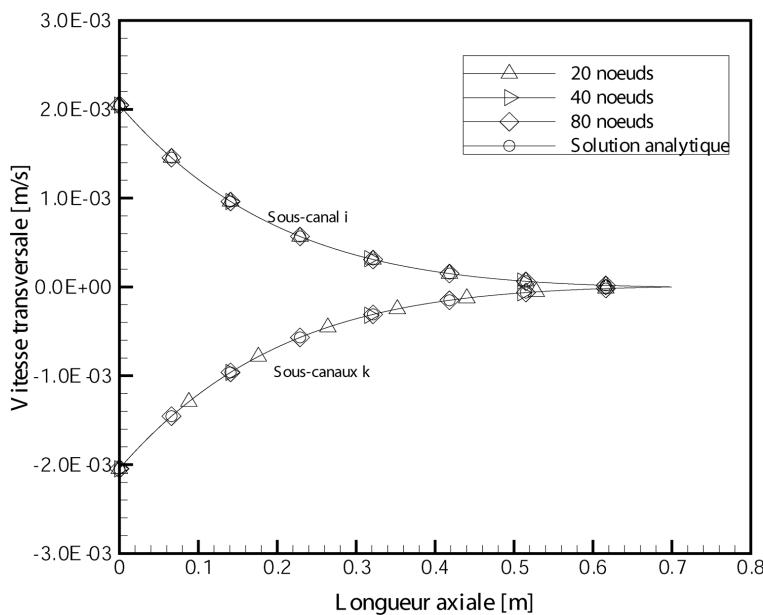


FIG. 5.9 – Profil de la vitesse transversale dans le sous-canal *i* et les sous-canaux *k* comparé à la solution analytique pour différents nombres de nœuds

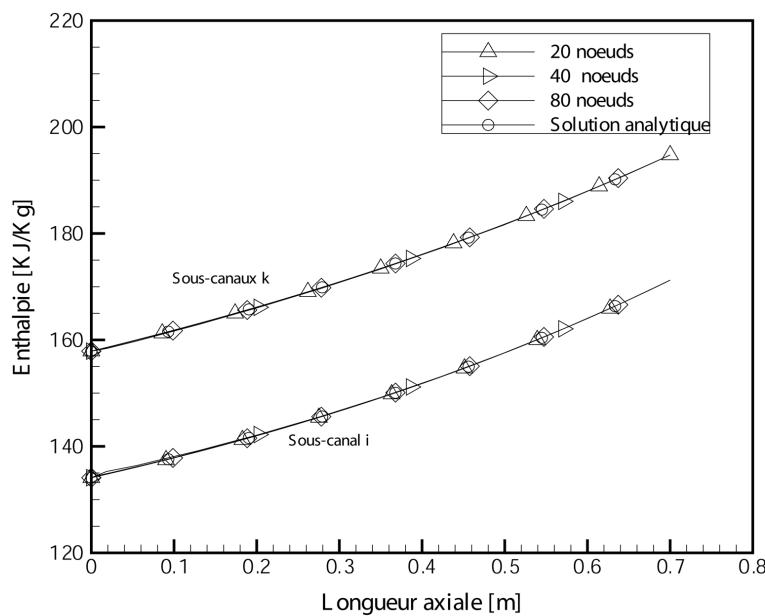


FIG. 5.10 – Profil de l'enthalpie dans le sous-canal *i* et les sous-canaux *k* comparé à la solution analytique pour différents nombres de noeuds

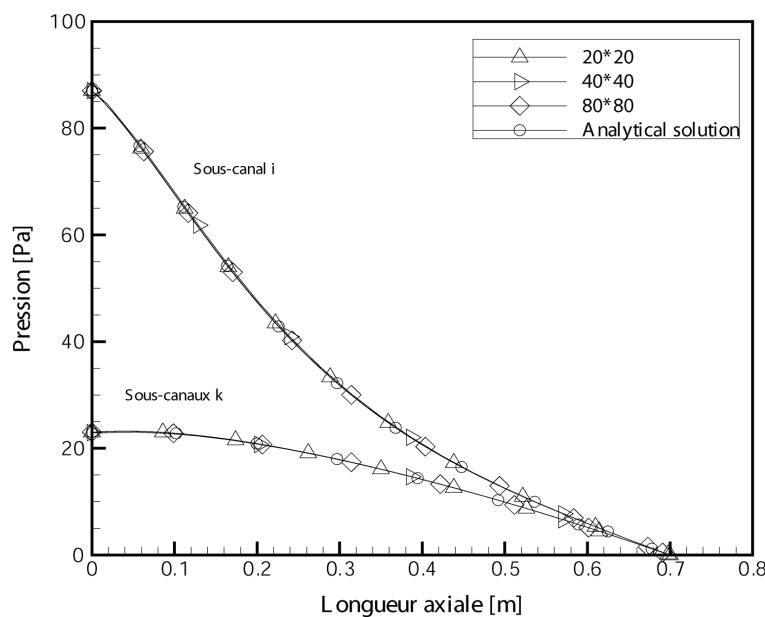


FIG. 5.11 – Profil de la pression dans le sous-canal *i* et les sous-canaux *k* comparé à la solution analytique pour différents nombres de noeuds

Le tableau (5.8) présente l'erreur de discréétisation relative calculée pour la vitesse axiale, la vitesse transversale , la pression et l'enthalpie. Nous remarquons que l'erreur relative de discréétisation pour les différentes variables du problème est inférieure à 0.5% et elle est réduite systématiquement lorsque nous serrons le maillage. Cela explique la superposition des différentes courbes obtenues pour les différents maillages.

TAB. 5.8 – L'erreur relative de discréétisation[%] calculée pour l'enthalpie ( $h$ ), la vitesse axiale ( $v$ ) et transversale ( $w$ ) et la pression ( $P$ ) pour différentes tailles de maillages

Maillage	20		40		80		160	
	i	k	i	k	i	k	i	k
$RDE_h$	2.89E-1	2.04E-2	7.34E-2	5.22E-2	1.84E-2	1.31E-2	4.62E-3	3.31E-3
$RDE_v$	1.41E-1	1.26E-1	3.38E-2	3.03E-2	8.29E-3	7.42E-3	2.04E-3	1.83E-3
$RDE_w$	7.68E-2	7.68E-2	1.79E-2	1.79E-2	4.13E-3	4.13E-3	9.91E-4	9.91E-4
$RDE_p$	5.08E-1	4.85E-1	1.29E-1	1.24E-1	3.27E-2	3.18E-2	8.31E-3	8.03E-3

La figure (5.12) représente l'ordre de précision observé, calculé pour la vitesse axiale, la vitesse transversale, la pression et l'enthalpie. Les résultats montrent un très bon accord entre l'ordre de précision observé et l'ordre de précision formel (FOA= 2) dans la région assymptotique lorsque  $\eta$  devient très petite. Cependant, et pour les mêmes raisons détaillées précédemment, l'ordre de précision observé calculé pour l'équation de correction de pression est légèrement sous-estimé par rapport à la valeur théorique (FOA=2).

## 5.5 Sensibilité du calcul de l'ordre de précision observé

L'ordre de précision observé est aussi appelé « ordre de convergence », puisque si la valeur de OOA calculé par le code converge vers FOA, nous pouvons déduire que le code converge vers la bonne solution. Le test de vérification de l'ordre de précision du schéma numérique utilisé dans le code est l'un des activités de vérification le plus rigoureux et le plus difficile à satisfaire. Si le développeur du code constate qu'il y a un désaccord entre l'ordre de précision observé et celui déterminé théoriquement, cela peut être dû à différentes causes de diverses origines dont les plus fréquentes sont :

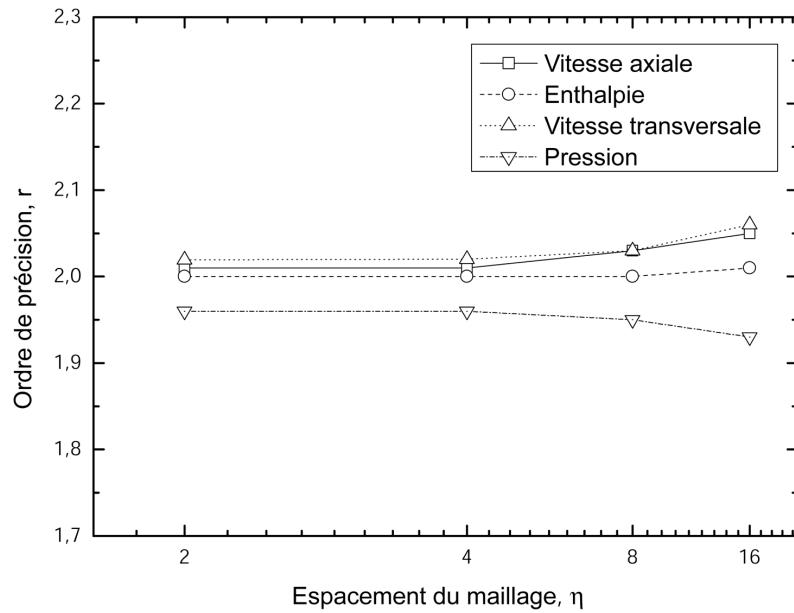


FIG. 5.12 – Ordre de précision observé (OOA) calculé pour la vitesse axiale, vitesse transversale, enthalpie et la pression

1. Les erreurs de programmation ou des bugs qui subsistent dans le code.
2. L'ordre de précision formel des nœuds internes d'un maillage donné est différent de celui déterminé sur les conditions aux limites ; ce qui implique un ordre de précision mixte sur tout le domaine de calcul.
3. La résolution du maillage n'est pas suffisante pour reproduire FOA et la solution n'est pas dans la région asymptotique de convergence.
4. La procédure itérative n'a pas convergée suffisamment.

Plus de détails peuvent être trouvées dans les références suivantes : Oberkampf and Trucano (2008), Botella & Peyret (2001), et Knupp & Salari (2002).

En ce qui concerne la qualité numérique de la procédure itérative, une attention particulière doit être prise, car OOA peut être erroné si le processus itératif ne converge pas suffisamment. En effet, comme il est indiqué sur la figure (4-5) décrivant l'algorithme numérique implanté dans le code SACATRI, nous distinguons deux niveaux d'itérations. Dans la « Boucle interne » qui concerne l'algorithme SIMPLE, les variables du problème sont actualisées sur le même sous-canal. A ce niveau, il est inefficace de résoudre, avec précision, les équations thermohydrauliques gouvernantes, car beaucoup d'itération interne peuvent conduire à la divergence de la boucle extérieure « Boucle externe » qui balaye les

différents SC. D'autre part, si nous considérons juste quelques itérations dans la boucle interne, durant toute la procédure itérative, le code peut converger facilement, mais vers une solution erronée, car l'équation de continuité ne sera pas satisfaite correctement. Pour pallier à ce problème, nous avons utilisé un critère de convergence dynamique dans la boucle interne. Au début du calcul, ce critère nécessite juste quelques itérations afin d'initier le processus itératif. Ensuite, le nombre d'itérations internes est incrémenté dynamiquement chaque fois que le critère de convergence de la boucle externe soit satisfait.

## **5.6 Vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux**

Les benchmarks de vérification proposés antérieurement (dans le cas 1-D et 3-D), peuvent être appliqués durant le développement du code. Ces benchmarks consistent à des solutions analytiques exactes correspondantes à des configurations géométriques simplifiées décrites par le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>ème</sup> test de vérification (2<sup>ème</sup> étape de vérification du code SACATRI).

Si les tests de vérification, que nous avons menés, donnent des résultats satisfaisants, ce qui est bien le cas, il est aussi important de soumettre le code SACATRI à un test de vérification dans un cas beaucoup plus compliqué. Ce test consiste à vérifier le code SACATRI lorsqu'il est appliqué à une configuration géométrique de SC plus étendue et plus proche de la réalité. En d'autre terme, ce cas de vérification envisagé, consiste à vérifier le code lorsque les équations thermohydrauliques sont résolues sur un réseau de SC. Dans ce contexte, nous avons appliqué le code SACATRI à une configuration géométrique de 24 sous-canal triangulaires, et avec l'utilisation des données géométriques et physiques réelles et standards issues des réacteurs de type TRIGA. La figure (5.13) illustre l'arrangement de sous-canaux employé dans ce test de vérification. Les différents paramètres implémentés dans le code sont résumés dans le tableau (5.9).

Pour le présent test de vérification, l'application de MMS, pour générer des solutions analytiques au problème, devient très compliquée, puisqu'elle nécessite l'incorporation des termes sources et les conditions aux limites correspondant aux 24 sous-canaux. Ce qui est très difficile à réaliser. Comme nous l'avons expliqué précédemment, dans le cas où nous ne disposons pas d'une solution analytique, nous pouvons utiliser trois solutions numériques calculées sur trois maillages de différentes résolutions afin d'évaluer l'ordre de précision observé.

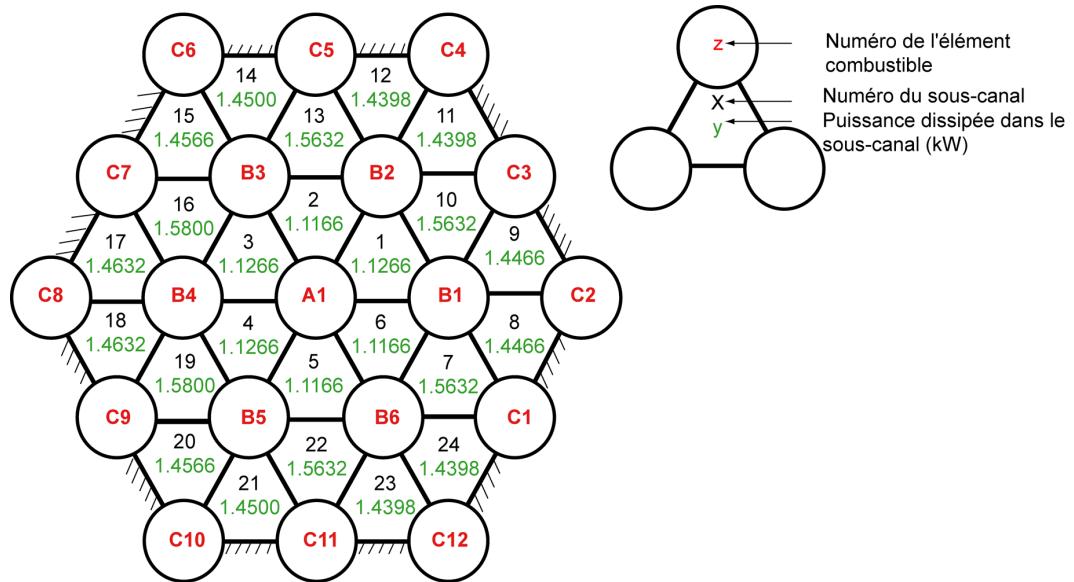


FIG. 5.13 – Arrangement de 24 sous-canaux de géométrie triangulaire

TAB. 5.9 – Données physiques et géométriques utilisées pour la vérification du code SACATRI simulant l’écoulement du fluide réfrigérant dans une configuration de 24 sous-canaux

Nombre total d’éléments combustibles	19
Nombre de sous-canaux dans le cœur	24
Diamètre du combustible (m)	0.0373
Pitch (m)	0.0340
La partie non chauffée à l’entrée du sous-canal (m)	0.0940
La partie non chauffée à la sortie du sous-canal (m)	0.0660
La partie active du combustible (m)	0.3810
Longueur totale du sous-canal (m)	0.541
Pression absolue à la sortie du cœur (bar)	1.5
Température de l’eau à l’entrée (°C)	33.1
Le facteur axial maximal de la puissance (APF)	1.3
Coefficient de perte de charge locale à l’entrée (Kr)	3.0
Coefficient de perte de charge locale à la sortie (Ke)	5.6

L'ordre de précision observé ( $r_\Phi$ ) et l'erreur relative de discréétisation ( $RDE_\Phi$ ) sont calculés pour la vitesse axiale ( $v$ ), la vitesse transversale ( $w$ ) et pour la température ( $T$ ) via les équations (5.22) et (5.29). Les trois maillages utilisés sont  $q_1 = 20$ ,  $q_2 = 40$  et  $q_3 = 80$ . La figure (5.14) représente l'ordre de précision observé calculé pour les SC suivants ; 1, 3, 5, 7, 10, 13, 16, 19, 21, et 24. D'après cette figure, nous remarquons que le code SACATRI reproduit parfaitement l'ordre de précision formel (FOA=2).

En raffinant le maillage, l'erreur de discréétisation relative doit diminuer selon le facteur  $1/\bar{Q}^r$  (voir équation 5.26). Puisque nous avons trouvé que l'ordre de précision observé égale à 2, et sachant que  $\bar{Q} = 2$ , la valeur de RDE calculée pour les trois maillages doit vérifier la relation suivante :

$$RDE_{q_1\Phi} = 4 \times RDE_{q_2\Phi} = 16 \times RDE_{q_3\Phi} \quad (5.58)$$

Le rapport entre  $RDE_\Phi$ , calculé pour le maillage étiré ( $q_1 = 20$ ), et  $RDE_\Phi$  calculé pour le maillage fin ( $q_2 = 40$  et  $q_3 = 80$ ), est représenté dans les tableaux (5.10), (5.11) et (5.12).

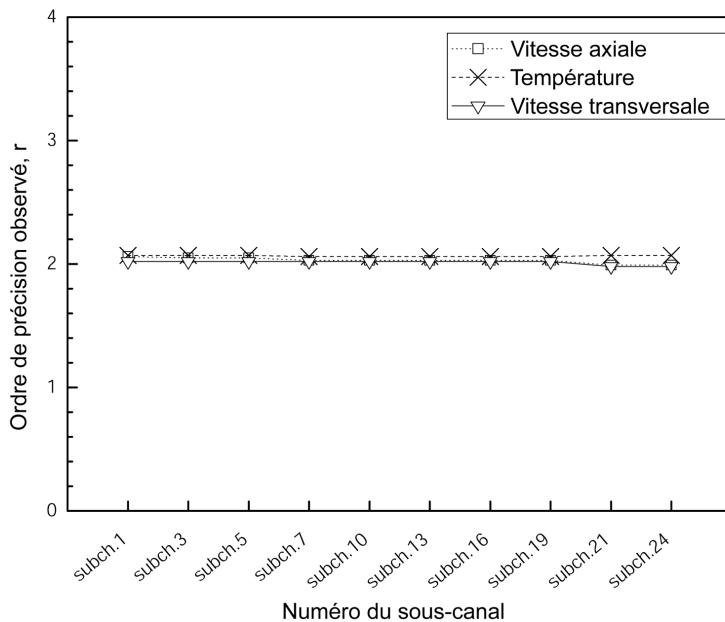


FIG. 5.14 – Ordre de précision observé calculé pour quelques sous-canaux dans le cas d'un réseau composé de 24 sous-canaux

Les résultats obtenus sont proches des valeurs théoriques exactes 4 et 16 qui correspondent respectivement à  $RDE_{q_1v}/RDE_{q_2v}$  et  $RDE_{q_1v}/RDE_{q_3v}$ .

Les profils des paramètres thermohydrauliques ( $v$ ,  $w$ ,  $P$  et  $T$ ) pour quelques sous-canaux de la configuration étudiée, sont représentés sur les figures (5.15)-(5.19).

TAB. 5.10 – (Le rapport de  $RDE_q$  (maillage étiré) sur  $RDE_q$  (maillage fin) pour La vitesse axiale ( $v$ )

N° du sous-canal	Vitesse axiale ( $v$ )	
	$\frac{RDE_{q1v}}{RDE_{q2v}}$	$\frac{RDE_{q1v}}{RDE_{q3v}}$
1	4.16	16.12
3	4.15	16.12
5	4.15	16.12
7	4.09	16.07
9	3.96	15.96
13	4.09	16.07
16	4.09	16.07
19	4.09	16.07
21	3.96	15.97
24	3.97	15.97

TAB. 5.11 – Le rapport de  $RDE_q$  (maillage étiré) sur  $RDE_q$  (maillage fin) pour La vitesse transversale ( $w$ )

N° du sous-canal	Vitesse transversale ( $w$ )	
	$\frac{RDE_{q1w}}{RDE_{q2w}}$	$\frac{RDE_{q1w}}{RDE_{q3w}}$
1	4.08	16.07
3	4.07	16.06
5	4.07	16.06
7	4.07	16.06
9	4.08	16.06
13	4.07	16.06
16	4.07	16.06
19	4.07	16.06
21	4.08	16.07
24	4.07	16.07

TAB. 5.12 – Le rapport de  $RDE_q$  (maillage étiré) sur  $RDE_q$  (maillage fin) pour La température ( $T$ )

N° du sous-canal	Température ( $T$ )	
	$\frac{RDE_{q1v}}{RDE_{q2v}}$	$\frac{RDE_{q1v}}{RDE_{q3v}}$
1	4.19	16.15
3	4.19	16.15
5	4.19	16.15
7	4.16	16.13
9	4.19	16.15
13	4.16	16.13
16	4.16	16.13
19	4.16	16.13
21	4.19	16.15
24	4.19	16.15

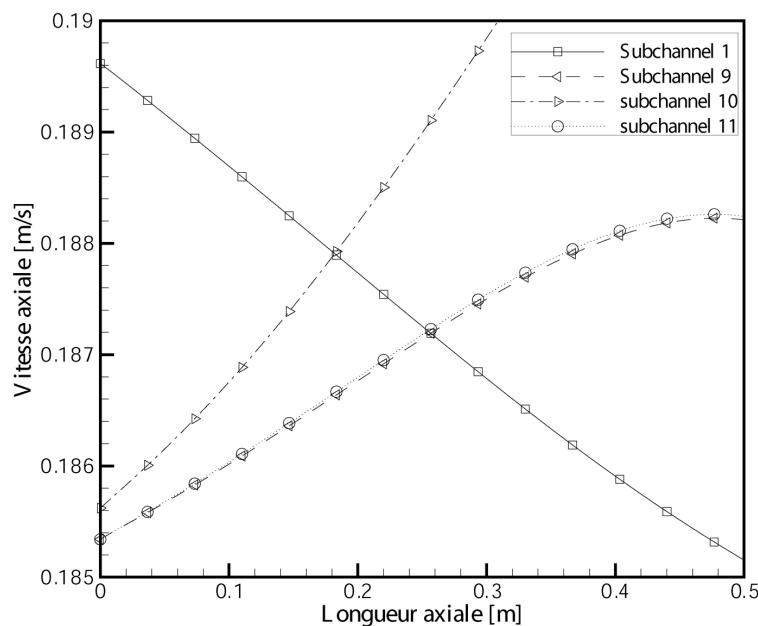


FIG. 5.15 – Profil de la vitesse axiale pour quelques sous-canaux dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux

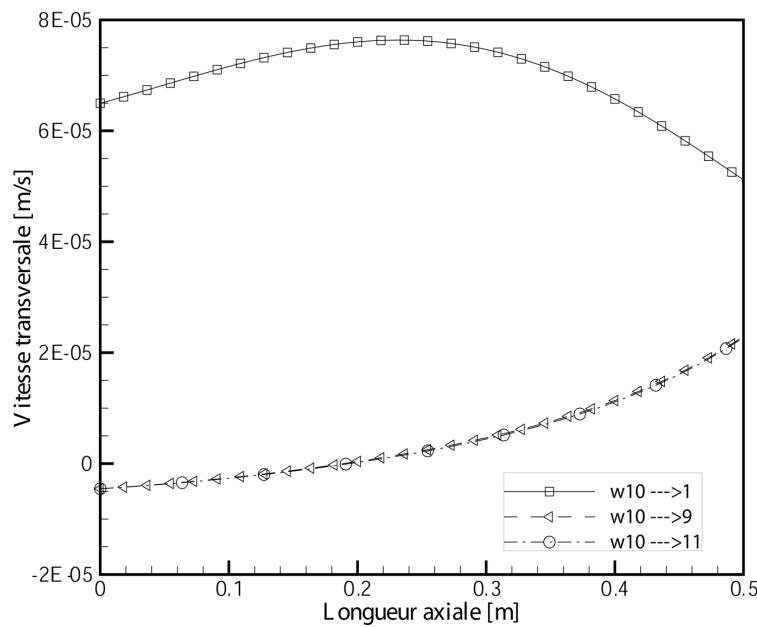


FIG. 5.16 – Profil de la vitesse transversale calculé sur le sous-canal 10 dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux

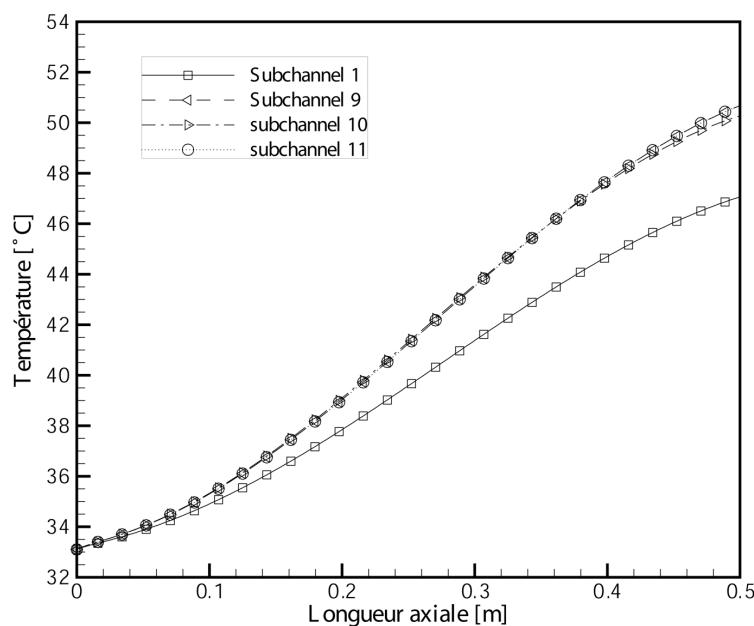


FIG. 5.17 – Profil de la température pour quelques sous-canaux dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux

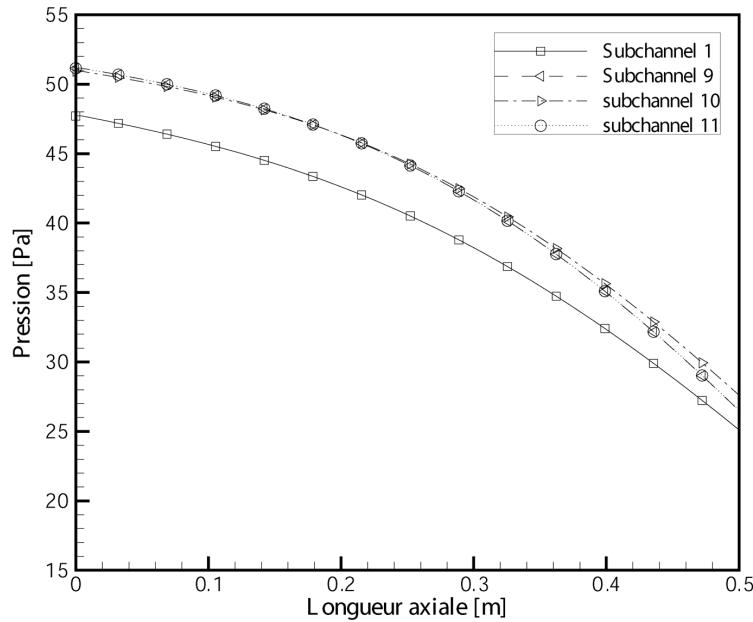


FIG. 5.18 – Profil de la pression pour quelques sous-canaux dans le cas de la vérification du code SACATRI sur un réseau de 24 sous-canaux

L'utilisation de MMS est typiquement vue avec scepticisme, mais d'après l'expérience de Roach (2002), de Oberkampf et Trucano (2008), ainsi que la notre (Merroun, 2009), elle revête d'un vrai enthousiasme. MMS nous permet de produire des solutions analytiques exactes considérées comme des benchmarks de précisions élevées, utilisées pour quantifier l'erreur de discréétisation lors du raffinement systématique du maillage. Le concept de cette méthode est simple, mais lorsqu'elle est correctement appliquée elle peut conduire à une vérification très rigoureuse du code.

Les activités de « Vérification » et de « Validation » des codes de simulations numériques constituent des tests critiques, car on ne peut pas être sûr que les résultats de simulations sont obtenus avec un degré acceptable de précision, à moins que le développeur prouve que le code fait ce qu'il doit faire. En plus, ces deux activités sont liées entre elles, telle que l'une complète l'autre. Une activité de vérification seule, ne sera significative que lorsque nous la faisons suivre par une activité de validation.

La validation est une procédure dans laquelle nous pouvons déterminer si le modèle mathématique décrivant le phénomène scientifique étudié, représente ce dernier avec une précision suffisante. Plusieurs aspects de validation peuvent être distingués. Le plus important et largement utilisé consiste à évaluer la précision du modèle numérique par la comparaison de ses résultats avec des réponses expérimentalement mesurées. Certains auteurs comme Oberkampf & Trucano (2002) et Oberkampf et al. (2004) ajoutent à cet

aspect de validation un autre qui repose sur l'interpolation ou l'extrapolation du modèle numérique aux conditions correspondantes à l'utilisation projetée du modèle. Il s'agit de fournir, aux utilisateurs du code, une indication sur la capacité prévisionnelle du modèle numérique, qui peut être employé pour des applications similaires à celle d'origine. De toute façon, ce dernier aspect dépend des résultats de l'évaluation de la précision du modèle par la comparaison avec les mesures expérimentales. Dans le cas de la validation du code SACATRI, nous nous limiterons au premier aspect de validation.

## 5.7 Validation du code SACATRI

Dans le but de valider le code SACATRI, nous avons choisi les résultats expérimentaux réalisés sur le réacteur IPR-R1, de puissance 250 kW, installé et opéré au Centre du Développement de la Technologie Nucléaire (CDTN) à Belo Horizonte, Brésil. Dans ce contexte, l'objectif essentiel attendu de cette validation est de quantifier la précision du modèle mathématique du code SACATRI à travers la comparaison des résultats de simulation du code avec les mesures effectuées sur le réacteur IPR-R1.

### 5.7.1 Description du réacteur IPR-R1

Le réacteur IPR-R1, installé au CDTN-Brésil, est un réacteur de type piscine construit par General Atomics, issu de la filière des réacteurs de type TRIGA MARK I. Il fonctionne à une puissance de 250 kW et refroidi par la convection naturelle. Le combustible utilisé est un alliage d'hydrure de zirconium avec un enrichissement de 20% en U-235. Il a une configuration cylindrique annulaire avec du graphite comme réflecteur. Une coupe radiale du cœur du réacteur IPR-R1 est illustrée sur la figure (5.19).

Le cœur du réacteur est chargé de 63 éléments combustibles-modérateurs de deux types :

- 59 éléments « low hydrid » revêtus en aluminium
- 4 éléments « high hydrid » revêtus en acier inoxydable.

Les 28 emplacements non remplies par les éléments combustibles-modérateurs sont occupés par 23 éléments factices en graphite, 3 barres de contrôles, un élément de source de neutrons et la chaussette centrale. Les éléments constitutifs le cœur du réacteur sont rangés en six anneaux concentriques nommés A, B, C, D, E et F dont les diamètres correspondants sont respectivement 0 cm (centre du réacteur), 8.1 cm, 16.0 cm, 23.9 cm, 31.8 cm et 39.8 cm.

Verticalement un sous-canal s'étend de la plaque inférieure jusqu'à la plaque supérieure du cœur du réacteur. L'eau pénètre dans le sous-canal à travers les orifices de la plaque inférieure, passe par la région non chauffée des éléments combustibles-modérateurs, puis par la partie active du combustible. Ensuite elle traverse la partie non chauffée, et enfin quitte le sous-canal à travers les orifices de la plaque supérieure.

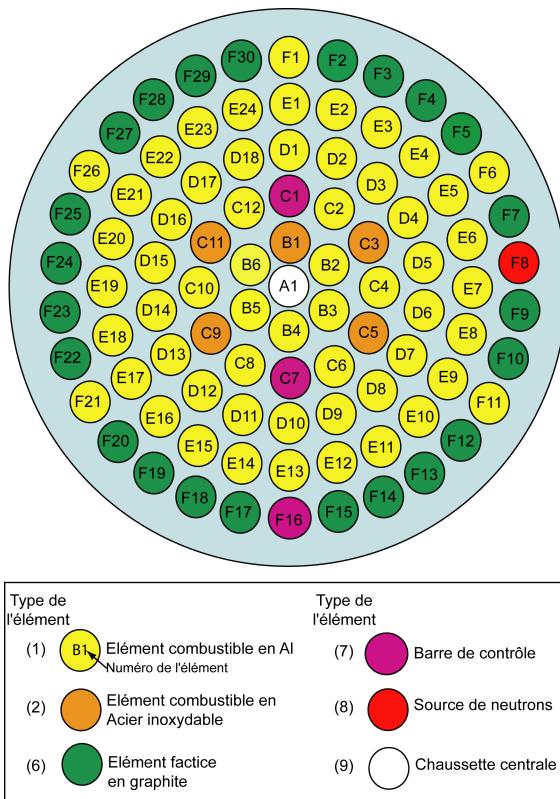


FIG. 5.19 – Cœur du réacteur IPR-R1

La force motrice qui fait circuler l'eau, du bas du sous-canal vers le haut, résulte des gradients de densité de l'eau et de la force de gravitation. Les forces qui s'opposent à la circulation naturelle de l'eau dans le sous-canal sont les pertes de charges locales dues au changement brusque de la section de passage de l'eau et aux forces de frottement de l'eau avec les parois du sous-canal.

La figure (5.20) représente la position et les dimensions longitudinales des différents éléments situés entre les deux plaques supérieure et inférieure, constituant le cœur du réacteur IPR-R1. Le tableau (5.13) résume les différentes données géométriques utilisées.

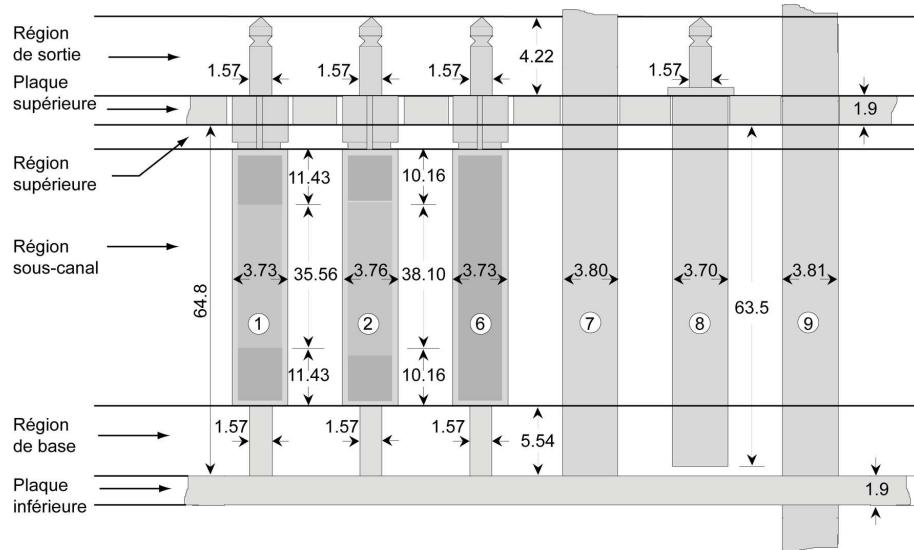


FIG. 5.20 – Postions longitudinales des six éléments constituants le cœur du réacteur IPR-R1 (Les valeurs sont données en cm)

TAB. 5.13 – Données géométriques des différentes parties du cœur du réacteur IPR-R1

Type de l'élément	1	2	6	7	8	9
<b>Région de base</b>						
Diamètre (cm)	1.57	1.57	1.57	3.80	3.70	3.81
Hauteur (cm)	5.54	5.54	5.54	5.54	5.54	5.54
<b>Région des sous-canaux</b>						
Diamètre (cm)	3.73	3.76	3.73	3.80	3.70	3.81
Hauteur (cm)	58.42	58.42	58.42	58.42	58.42	58.42
<b>Région supérieure</b>						
Diamètre (cm)	2.95	2.43	2.95	3.80	3.70	3.81
Périmètre (cm)	10.49	11.18	10.49	11.94	11.62	11.97
Hauteur (cm)	0.84	0.84	0.84	0.84	0.84	0.84
<b>Région de sortie</b>						
Diamètre (cm)	1.57	1.57	1.57	3.80	1.57	3.81
Hauteur (cm)	4.22	4.22	4.22	4.22	4.22	4.22

### 5.7.2 Discrétisation en sous-canaux

Le cœur du réacteur IPR-R1 est discrétisé en 104 sous-canaux. Ils sont latéralement ouverts, ce qui permet un échange de masse et d'énergie entre eux.

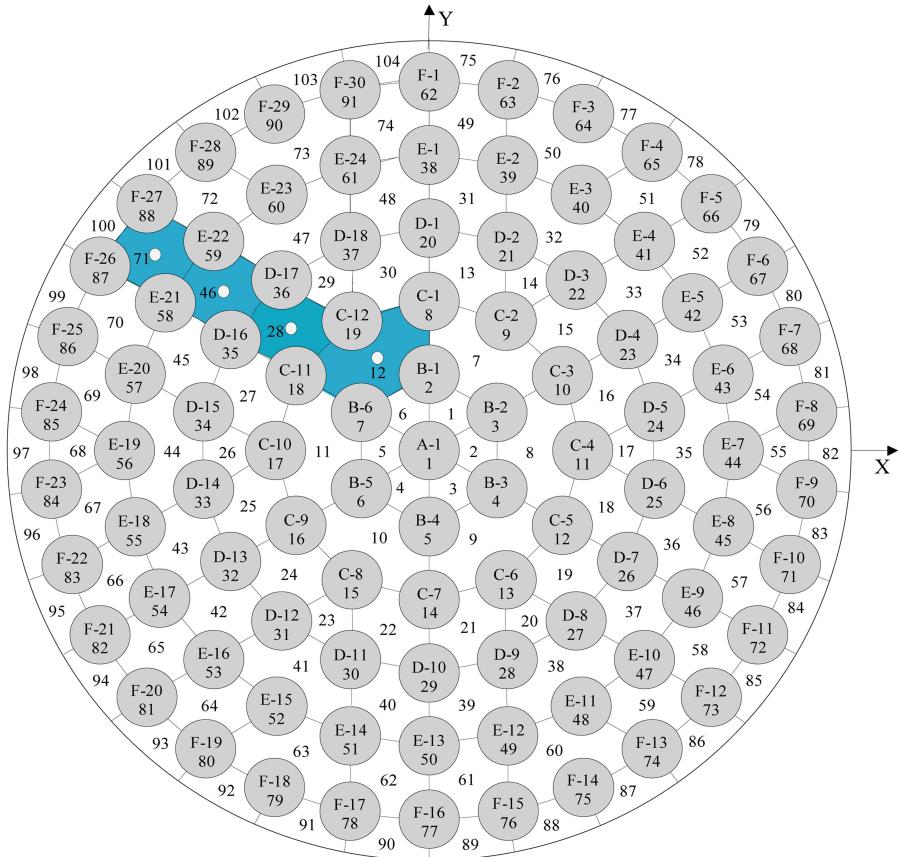


FIG. 5.21 – Discrétisation en sous-canaux du cœur du réacteur IPR-R1

### 5.7.3 Distribution de la puissance

Puisque le code SACATRI n'est pas couplé avec un code de calcul neutronique, alors il nécessite, les données concernant la distribution de la densité de puissance dans le cœur du réacteur telle que la distribution radiale et axiale de la puissance, ainsi que le pic du facteur de puissance axiale et radiale de chaque élément combustible-modérateur. La valeur du pic du facteur de puissance radiale  $f_R$  a été calculée par Dalle (2003) moyennant les codes WIMSD4c et CITATION. Les résultats obtenus pour chaque élément combustible sont représentés sur la figure (5.22).

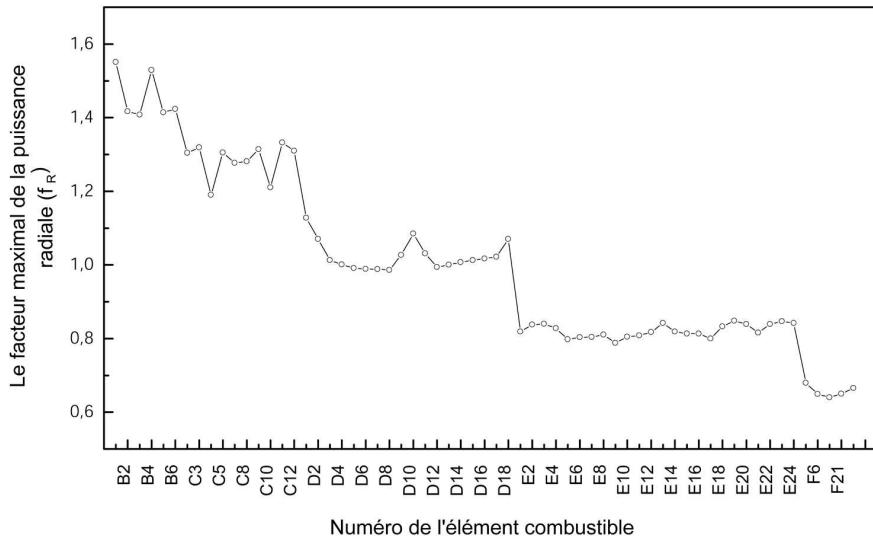


FIG. 5.22 – Facteur maximal de la puissance radiale des éléments combustibles du cœur du réacteur IPR-R1

Quant au facteur de pic de puissance axiale du réacteur IPR-R1, il est pris égale à 1.25 (Veloso, M.A.F, 2004).

#### 5.7.4 Description de l'expérience et validation

Afin d'évaluer la précision du modèle mathématique du code SACATRI, nous avons comparé les résultats de simulation avec des mesures expérimentales effectuées sur le réacteur IPR-R1. Ces mesures, réalisées par Mesquita (2005), consistent à relever les valeurs de la température du fluide réfrigérant sur quelques sous-canaux du cœur du réacteur. L'objectif de cette expérience est de dresser la carte de température du cœur du réacteur IPR-R1 (Veloso M.A, 2005, 2006). Les mesures expérimentales ont été réalisées pour quatre niveaux de puissance ; 110kW, 160kW, 210kW et 265kW.

Les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 (figure 5.21) ont été choisis pour réaliser ces mesures expérimentales. Au cours des essais expérimentaux, le débit massique a été maintenu constant dans la première boucle est vaut  $32\text{m}^3/\text{h}$ , ce qui correspond à la valeur ordinaire au cours du fonctionnement normal du réacteur à une puissance de 250 kW. La température de l'eau à l'entrée et à la sortie des sous-canaux 12, 28, 46 et 71 a été mesurée par deux sondes rigides en aluminium de diamètre 7.9 mm. Chaque sonde est équipée d'un thermocouple (Chromel-Alumel k-type) de diamètre 0.13 mm. Ces sondes pénètrent

axialement dans les sous-canaux à travers des trous situés sur la plaque supérieure.

Les thermocouples ont été calibrés de telle sorte que les mesures expérimentales obtenues soient dans l'intervalle d'erreur expérimental de l'ordre de  $\pm 1^{\circ}\text{C}$ . Les principales caractéristiques thermohydrauliques des sous-canaux dans lesquels les températures sont mesurées, sont présentées dans le tableau (5.14).

TAB. 5.14 – Quelques caractéristiques thermohydrauliques des sous-canaux où les températures sont mesurées

Numéro du sous-canal	Diamètre hydraulique $D_h (\times 10^{-2}\text{m})$	Section de passage de l'eau (A) $(\times 10^{-4}\text{m}^2)$
12	1.8623	8.2139
28	1.9679	15.7786
46	1.9578	5.7354
71	1.9436	5.6938

Pour la simulation thermohydraulique, les coefficients de pertes de charges locales, dues au rétrécissement et à l'élargissement brusque de la section de passage de l'eau ainsi que ceux dues au passage de l'eau à travers les orifices de la plaque inférieure et supérieure, doivent être déterminés. La connaissance de ces coefficients est indispensable et ils sont calculés à travers les corrélations empiriques proposées par Idelchik (1996). Les tableaux (5.15) et (5.16) résument respectivement ces résistances à l'entrée et à la sortie des sous-canaux du cœur du réacteur IPR-R1 (Veloso, M.A.F, 2004).

Au cours de notre simulation, température d'entrée du fluide est prise égale à  $38^{\circ}\text{C}$ . Cette température correspond à la moyenne des températures mesurées expérimentalement à l'entrée des sous-canaux.

Pour différents niveaux de puissance du réacteur, nous avons effectué une comparaison entre la température de l'eau calculée par le code SACATRI, à la sortie des sous-canaux ( $T_s^{\text{SACATRI}}$ ), et celles mesurées expérimentalement ( $T_{exp}$ ). Les différents résultats sont présentés dans les tableaux (5.17)-(5.20).

L'analyse de ces résultats montre que les températures de sorties, calculées par le code SACATRI, sont généralement en bon accord avec les températures mesurées expérimentalement. L'erreur relative maximale est obtenue sur le sous-canal 71 pour une puissance du réacteur de 265kW et elle est de l'ordre de 6.35%. Cependant, l'erreur relative minimale, qui est de l'ordre de 0.07% est obtenue pour le sous-canal 28 à une puissance du réacteur

de 265kW.

TAB. 5.15 – Les résistances hydrauliques calculées à l'entrée des sous-canaux

Sous-canal	$K_r$	Sous-canal	$K_r$	Sous-canal	$K_r$	Sous-canal	$K_r$
1	4.64	2	4.62	3	4.64	4	4.64
5	4.62	6	4.64	7	5.73	8	5.89
9	5.73	10	5.73	11	5.89	12	5.73
13	5.52	14	5.79	15	5.89	16	5.89
17	5.79	18	5.89	19	5.89	20	5.79
21	5.52	22	5.52	23	5.79	24	5.89
25	5.89	26	5.79	27	5.89	28	5.89
29	5.79	30	5.52	31	5.89	32	5.88
33	5.89	34	5.89	35	5.88	36	5.89
37	5.89	38	5.88	39	5.61	40	5.61
41	5.88	42	5.89	43	5.89	44	5.88
45	5.89	46	5.89	47	5.88	48	5.89
49	5.89	50	5.88	51	5.89	52	5.89
53	5.89	54	5.89	55	5.86	56	5.89
57	5.89	58	5.89	59	5.89	60	5.50
61	5.55	62	5.55	63	5.88	64	5.89
65	5.89	66	5.89	67	5.89	68	5.86
69	5.89	70	5.89	71	5.89	72	5.89
73	5.88	74	5.89	75	5.08	76	5.08
77	5.08	78	5.08	79	5.08	80	5.08
81	5.08	82	5.08	83	5.08	84	5.08
85	5.08	86	5.08	87	4.48	88	4.48
89	5.08	90	5.08	91	5.08	92	5.08
93	5.08	94	5.08	95	5.08	96	5.08
97	5.08	98	5.08	99	5.08	100	5.08
101	5.08	102	5.08	103	5.08	104	5.08

Puisque nous avons quantifié et contrôlé les principaux types d'erreurs numériques et aucune perturbation n'est détectée concernant l'exactitude de la solution numérique, nous supposons à ce niveau de validation, que les faibles écarts relatifs calculés entre les températures mesurées expérimentalement et celles obtenues par le code SACATRI peuvent être dues, principalement, aux différentes approximations physiques et géométriques adoptées lors de l'établissement du modèle thermohydraulique, notamment l'utilisation de l'approximation de Boussinesq ainsi que les différentes corrélations empiriques employées pour modéliser les phénomènes très compliqués tel que l'échange de masse turbulent entre les sous-canaux adjacents et les pertes de charges linéaires et singulières (Merroun, 2009). En effet, d'une part, la complexité de la géométrie du réacteur, plus particulièrement la

difficulté résultante du calcul des coefficients de pertes de charges à l'entrée et à la sortie des SC, et d'autre part le nombre important de phénomènes physiques qui interagissent, rendent difficile la description de tous les détails cruciaux lors de la modélisation.

Cependant, dans l'approche sous-canal utilisée, la vitesse axiale, la pression et la température sont moyennés au centre de chaque VC d'un sous-canal. En plus, les forces de viscosités sont négligées et remplacées par les pertes de charges dues au frottement résultant de l'écoulement du réfrigérant dans le sous-canal. Ceci implique une distribution uniforme des paramètres thermohydrauliques dans un VC d'un sous-canal. En effet, ces approximations ne reflètent pas la réalité telle qu'elle est, sachant que les mesures expérimentales sont effectuées exactement au centre du sous-canal.

En générale, compte tenu de l'incertitude concernant les données expérimentales, les résultats de simulation sont acceptables pour une première validation du modèle mathématique du code SACATRI.

## 5.8 Comparaison code-code

Dans cette section, nous avons comparé les résultats du code SACATRI à ceux déterminés par le code PANTERA-1P (Veloso M.A, 1985), qui est une version modifiée du code COBRA IIIC (Rowe, 1973) adapté au régime de fonctionnement du réacteur IPR-R1 (Veloso, M.A., 2006).

Il s'agit d'un processus de vérification moins rigoureux que les deux autres méthodes décrites plus haut, mais il peut être très utile par le biais de l'accumulation de preuves et des évidences concernant la capacité du modèle thermohydraulique à décrire le réalisme d'une expérience et de prouver par la suite que le code SACATRI peut être utilisé avec légitimité pour prendre des décisions. En effet, une vérification et validation absolue d'un code de simulation numérique peut être impossible, mais une vérification et validation par rapport à une série de tests et de tolérances prédéfinies peut être parfaitement légitime en tant que base pour la prise de décisions (Babuska, 2004).

TAB. 5.16 – Les résistances hydrauliques calculées à la sortie des sous-canaux

Sous-canal	$K_e$	Sous-canal	$K_e$	Sous-canal	$K_e$	Sous-canal	$K_e$
1	0.66	2	0.56	3	0.66	4	0.66
5	0.56	6	0.66	7	1.23	8	0.83
9	1.23	10	1.23	11	0.83	12	1.23
13	2.63	14	0.93	15	1.33	16	1.33
17	0.93	18	1.33	19	1.33	20	0.93
21	2.63	22	2.63	23	0.93	24	1.33
25	1.33	26	0.93	27	133	28	1.33
29	0.93	30	2.63	31	1.29	32	1.17
33	1.29	34	1.29	35	1.17	36	1.29
37	1.29	38	1.17	39	2.13	40	2.13
41	1.17	42	1.29	43	1.29	44	1.17
45	1.29	46	1.29	47	1.17	48	1.29
49	1.27	50	1.19	51	1.26	52	1.27
53	1.27	54	1.26	55	1.05	56	1.27
57	1.27	58	1.27	59	1.26	60	1.83
61	2.35	62	2.35	63	1.19	64	1.26
65	1.27	66	1.27	67	1.26	68	1.05
69	1.26	70	1.27	71	1.27	72	1.26
73	1.19	74	1.27	75	2.22	76	2.22
77	2.22	78	2.22	79	2.22	80	2.22
81	2.22	82	2.22	83	2.22	84	2.22
85	2.22	86	2.22	87	11.91	88	11.91
89	2.22	90	2.22	91	2.22	92	2.22
93	2.22	94	2.22	95	2.22	96	2.22
97	2.22	98	2.22	99	2.22	100	2.22
101	2.22	102	2.22	103	2.22	104	2.22

Dans ce contexte, nous avons comparé la différence absolue entre les températures de sorties calculées par les deux codes (SACATRI et PANTERA-1P) et les températures de sorties mesurées expérimentalement pour différents niveaux de puissance ( $|T_{simulation} - T_{exp}|$ ). Les résultats sont représentés sur les figures (5.23)-(5.26). Une analyse préliminaire de ces figures montre que les deux codes thermohydrauliques SACATRI et PANTERA-1P, développés séparément, reproduisent presque les mêmes températures de sorties, et ce, pour tous les niveaux de puissance utilisés dans l'expérience. Pour les deux codes, le plus faible écart entre les résultats de simulation et les mesures expérimentales est observé au niveau du sous-canal 28. La différence absolue maximale entre les résultats de simulations des deux codes et les mesures expérimentales ne dépasse pas 3°C moyennant le code SACATRI et 4°C avec le code PANTERA-1P.

TAB. 5.17 – Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACATRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 110kW

110kw			
N° du sous-canal	$T_{exp}$ [°C]	$T_s^{SACATRI}$ [°C]	Erreur relative %
12	44	46.1906987	4.98
28	46	45.8060236	0.42
46	47	44.1183733	6.13
71	44	41.8775761	4.82

TAB. 5.18 – Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACATRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 160kW

160kw			
N° du sous-canal	$T_{exp}$ [°C]	$T_s^{SACATRI}$ [°C]	Erreur relative %
12	47	49.4816601	5.28
28	49	48.962952	0.08
46	49	46.6483837	4.80
71	45	43.5333762	3.26

Dans un premier lieu, nous constatons que la précision des résultats de simulation dépend de la position où la température de sortie est mesurée. Egalement, nous remarquons que, selon le sous-canal où les mesures sont effectuées, cette précision varie de la même façon que ce soit pour le code SACATRI ou que pour le code PANTERA-1P. Pour de faibles puissances dissipées dans les sous-canaux considérés ( $< 6\text{ kW}$ ), les températures de sorties calculées par le code SACATRI, semblent être plus proches des mesures expérimentales que celle calculées par le code PANTERA-1P. Lorsque la puissance dissipée dans les sous-canaux est supérieure à  $6\text{ kW}$  (le cas du sous-canal 12 à une puissance du réacteur supérieure à  $210\text{ kW}$ ), les résultats obtenus par le code PANTERA-1P sont plus proches des mesures expérimentales que ceux calculés par le code SACATRI. Donc, pour des niveaux supérieurs de puissance dissipée dans les sous-canaux, nous notons que les résultats obtenus par le code SACATRI sont légèrement surestimés par rapport à ceux calculés par le code PANTERA-1P.

Pour expliquer ce comportement, nous partons de la figure (5.27) qui représente les différentes puissances dissipées par les éléments combustibles dans les sous-canaux 12, 28, 46 et 71. D'après la figure (5.27), nous remarquons que plus la puissance dissipée

TAB. 5.19 – Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACATRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 210kW

210kw			
N° du sous-canal	$T_{exp}$ [°C]	$T_s^{SACATRI}$ [°C]	Erreur relative %
12	50	52.574033	5.15
28	52	51.936360	0.12
46	52	49.052413	5.67
71	47	45.130995	3.98

TAB. 5.20 – Comparaison entre les températures de sorties calculées par le code SACATRI et ceux mesurées expérimentalement pour une puissance de 265kW

265kw			
N° du sous-canal	$T_{exp}$ [°C]	$T_s^{SACATRI}$ [°C]	Erreur relative %
12	53	55.793020	5.27
28	55	55.035856	0.07
46	54	51.572677	4.50
71	50	46.827433	6.35

dans les sous-canaux augmente, plus le gradient de la puissance devient de plus en plus remarquable. Par conséquent, ce gradient de puissance implique une différence de pression significative entre les sous-canaux adjacents. Ce gradient de pression induit un échange d'un débit massique latéral important. Cet effet, devient plus notable lorsque les sous-canaux sont situés au ou près du centre du réacteur où les puissances sont maximales (exemple des sous-canaux 12 et 6).

Les écarts observés, d'une part entre les mesures expérimentales et les résultats de simulation que ce soit pour le code SACATRI ou pour le code PANTERA-1P, et d'autre part entre les résultats calculés par les deux codes, peuvent être dus prioritairement aux :

1. Différentes approximations adoptées lors de la modélisation des échanges de masses latéraux (dus à la turbulence et au gradient de pression).
2. Calculs des coefficients de pertes de charges.

Nous tenons à signaler que les circonstances liées aux conditions expérimentales peuvent influencer eux même sur les résultats de l'expérience. Par d'exemple, il se peut que les thermocouples ne sont pas localisés dans la position géométrique exacte (centre des sous-canaux), ce qui pourrait conduire à une imprécision des mesures expérimentales.

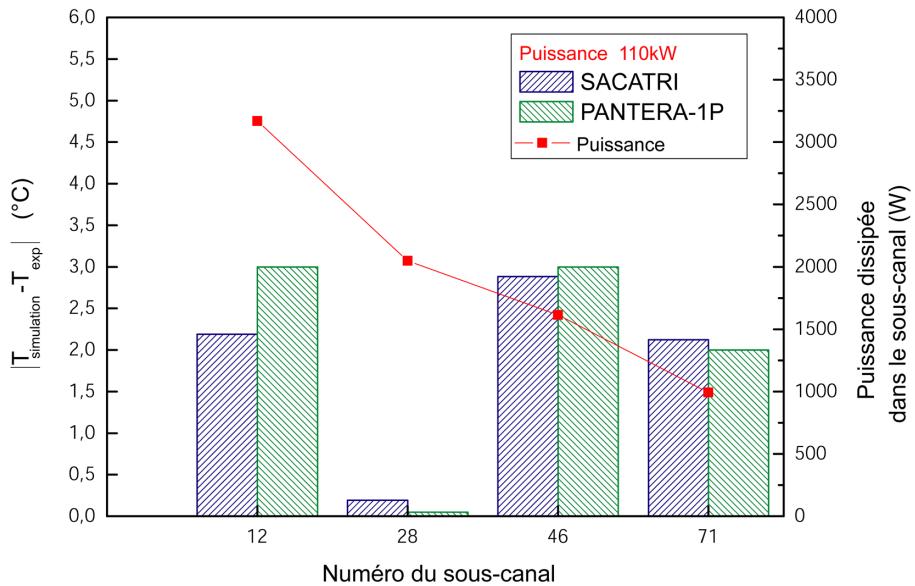


FIG. 5.23 – Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 110kW

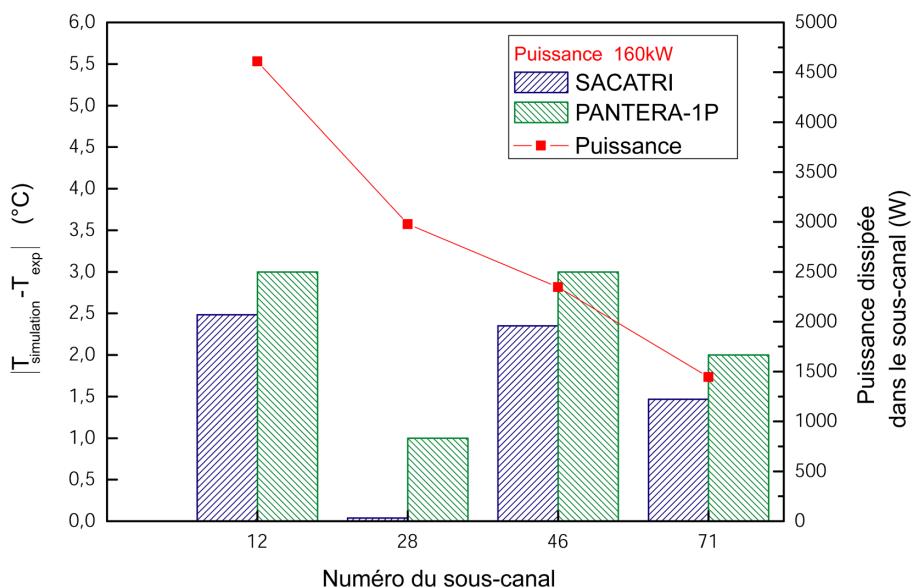


FIG. 5.24 – Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 160kW

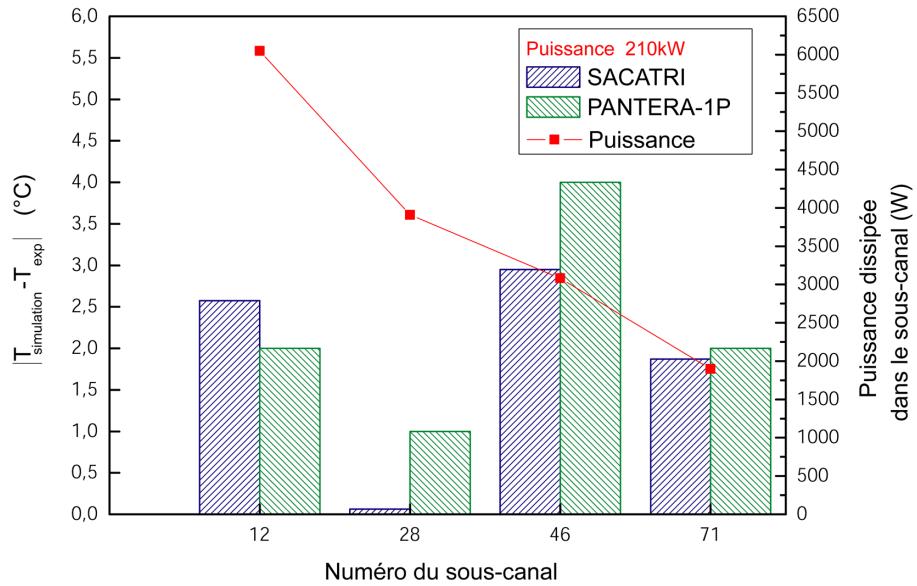


FIG. 5.25 – Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 210kW

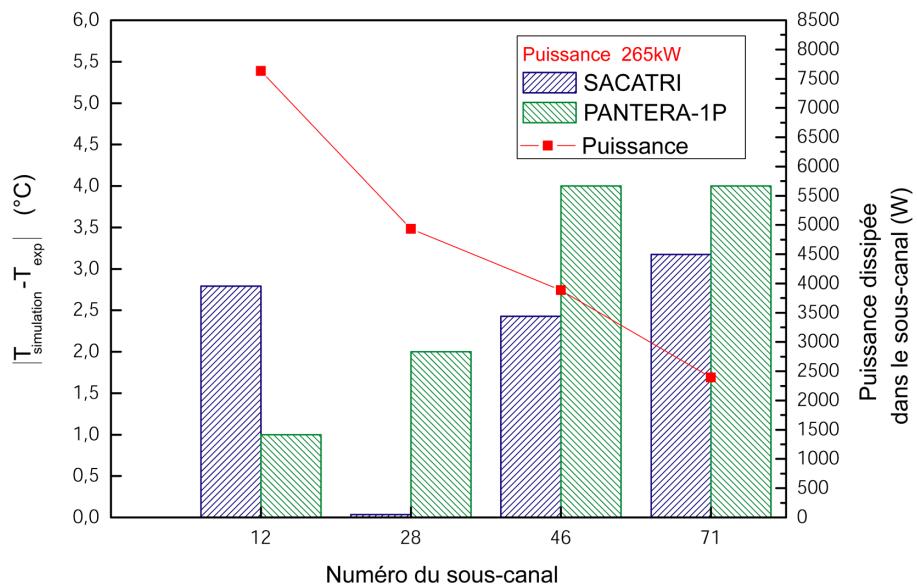


FIG. 5.26 – Comparaison de la différence entre la température calculée par SACATRI et PANTERA-1P et celle mesurée expérimentalement pour une puissance de 265kW

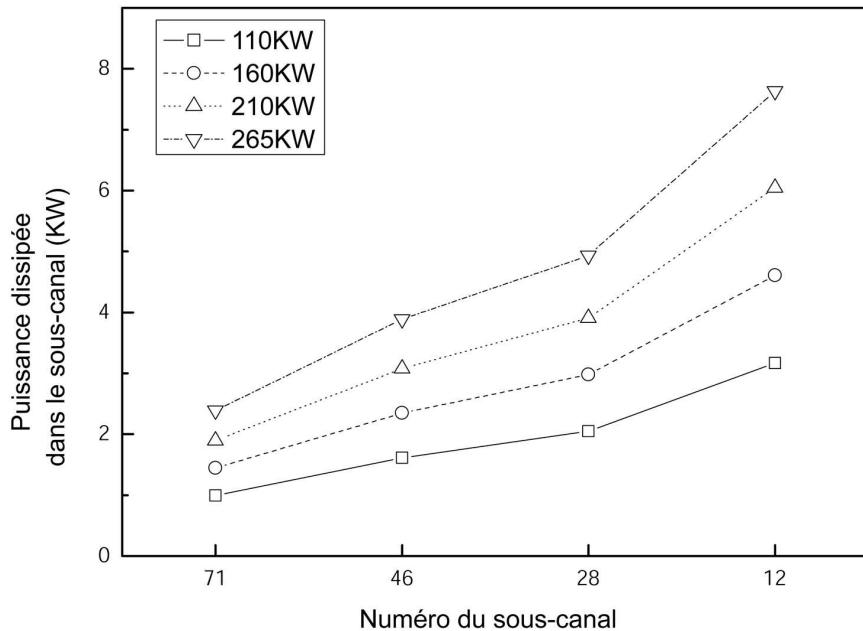


FIG. 5.27 – Puissance dissipée dans les sous-canaux 12, 28, 46 et 71

Les figures (5.28)-(5.31) représentent le flux massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux voisins. Nous remarquons que le taux du débit massique latéral dépend de la distribution de la densité de puissance générée par les éléments combustibles. Il augmente en fonction de la puissance du réacteur, tout en gardant le même profil de la variation sur chaque sous-canal, à l'exception du sous-canal 12.

Dans le sous-canal 12, à partir d'une puissance du réacteur supérieure à 210 kW, le flux massique latéral provenant du sous-canal 30 devient plus important que celui provenant du sous-canal 6, malgré que le gradient de puissance entre le sous-canal 12 et 6 est supérieur à celui entre le sous-canal 12 et 30. Ceci est expliqué par le fait que le débit massique axial traversant le sous-canal 30 est trois fois plus grand que celui traversant le sous-canal 6 (figure 5.32)(le sous-canal 30 est un sous-canal quadrangulaire de section de passage du fluide réfrigérant plus grande que celle du sous-canal triangulaire 6). Par conséquent, la contribution massique du sous-canal 30 vers le sous-canal 12 devient beaucoup plus notable que celle du sous-canal 6. Ceci constitue un apport énergétique supplémentaire vers le sous-canal 12 qui entraîne l'augmentation de la température de sortie de ce sous-canal.

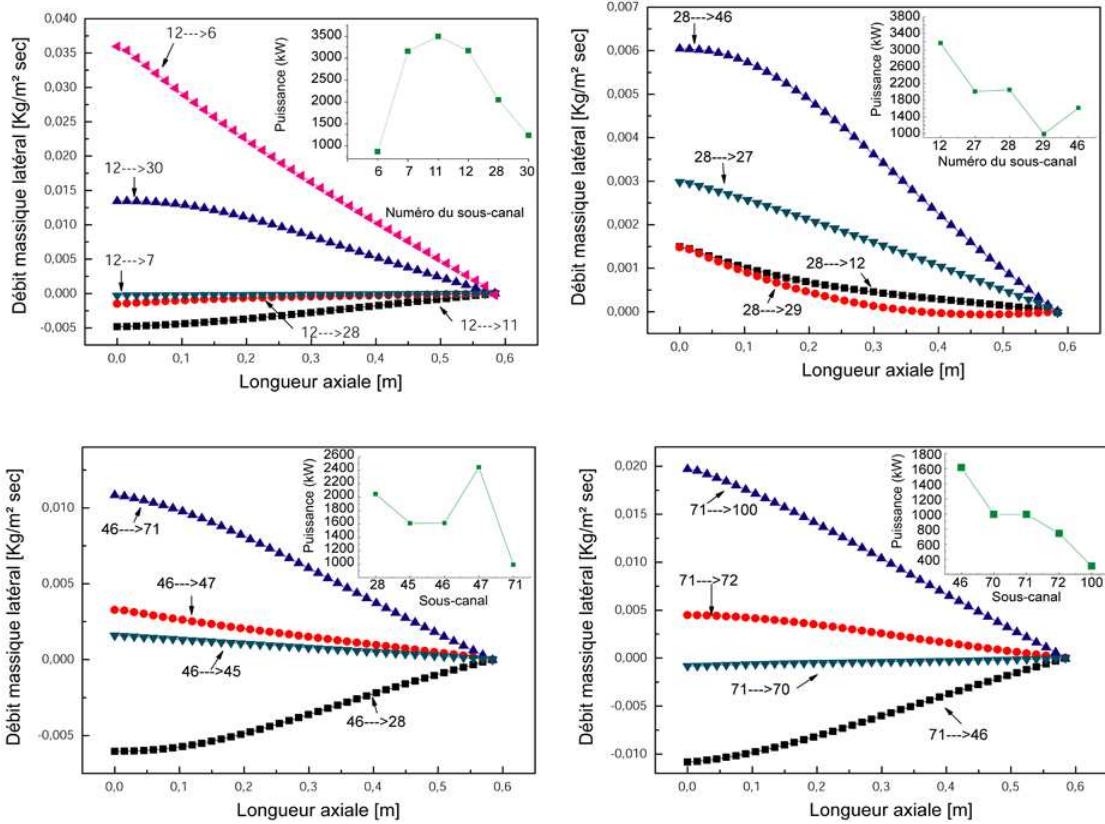


FIG. 5.28 – Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 110kW

Donc, nous constatons que non seulement la puissance générée par les éléments combustibles et la température d'entrée du fluide réfrigérant contrôle la température de sortie du sous-canal, mais aussi la contribution massique latéral des sous-canaux voisins. Les débits massiques latéraux dépendent à leurs tours, d'une part de la différence de pression entre les sous-canaux, et d'autre part, du débit massique axial traversant le sous-canal donneur du flux de masse latéral. D'où l'importance majeure de la détermination exacte des coefficients de pertes de charges dans le calcul de la redistribution du débit à l'entrée du cœur du réacteur.

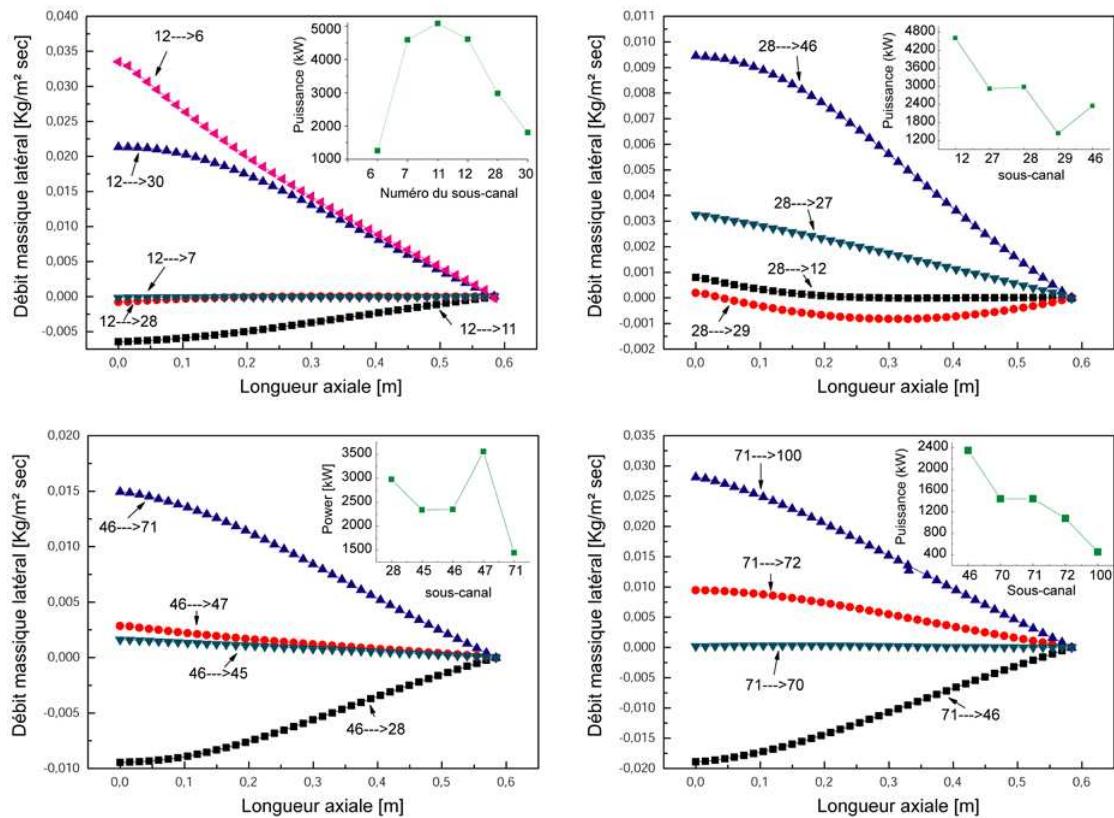


FIG. 5.29 – Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 160kW

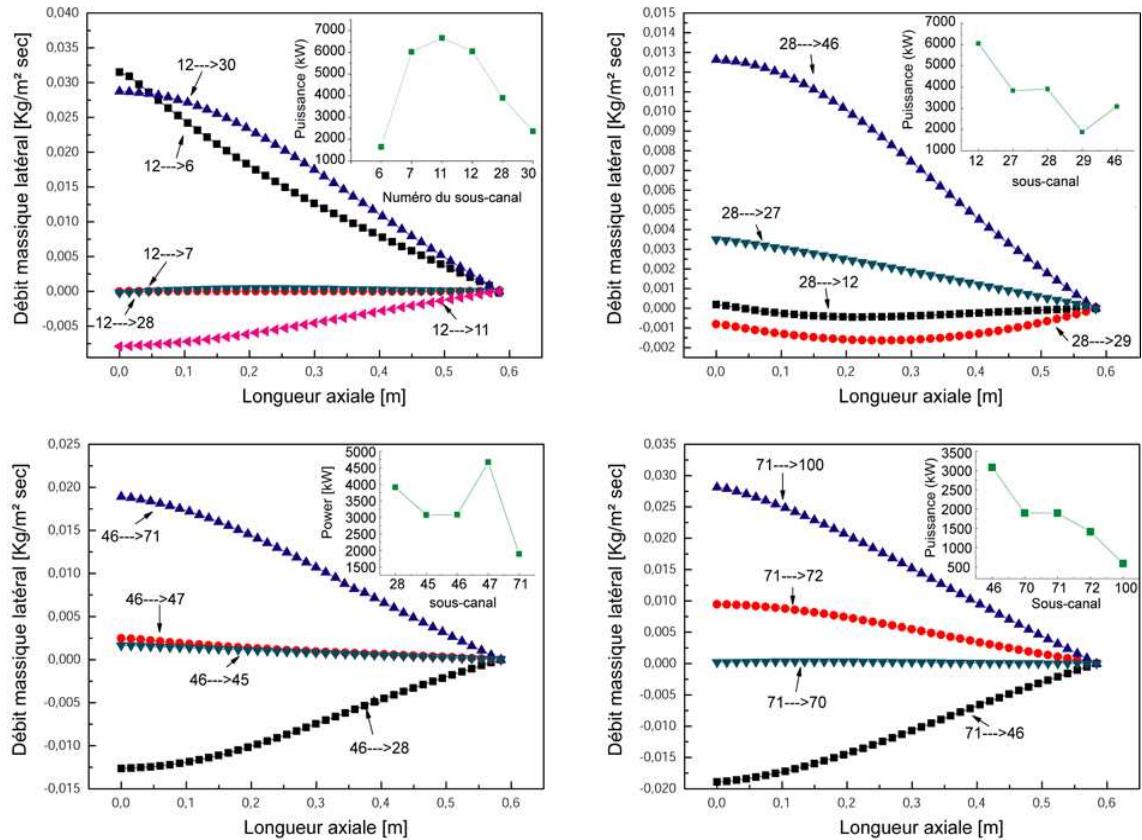


FIG. 5.30 – Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 210kW

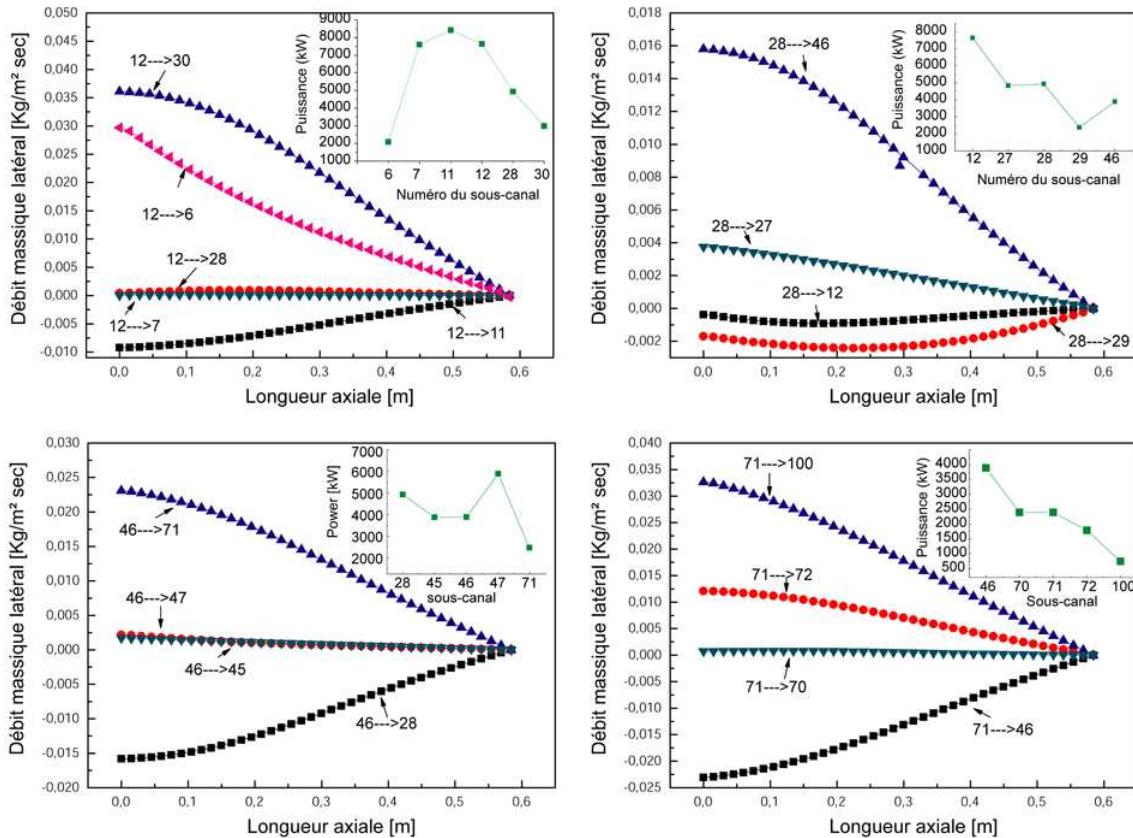


FIG. 5.31 – Débit massique latéral échangé entre les sous-canaux 12, 28, 46 et 71 et leurs sous-canaux adjacents pour une puissance de 265kW

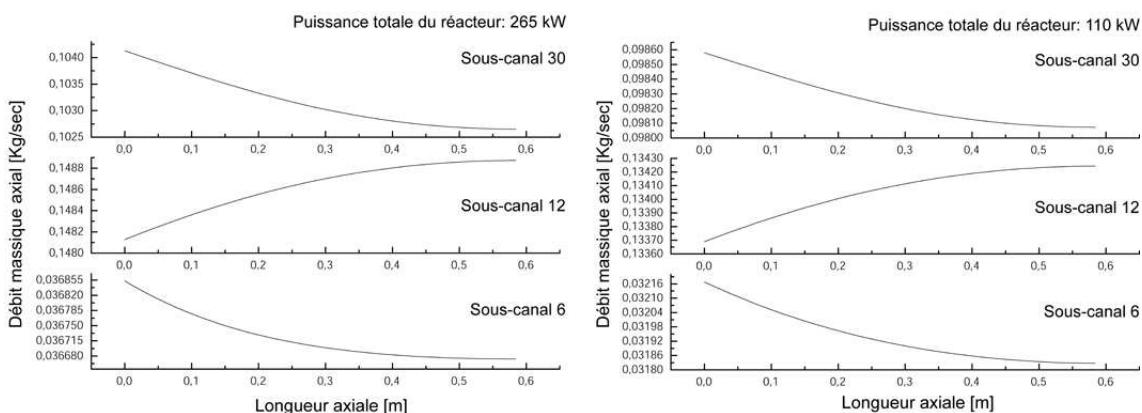


FIG. 5.32 – Le débit massique axial traversant les sous-canaux 6, 12 et 3

## 5.9 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons soumis le code SACATRI à des tests de vérification et de validation, afin de quantifier les différentes incertitudes liées à la modélisation physique et à la résolution numériques des équations thermohydrauliques.

Pour la vérification du code SACATRI, qui est une activité purement mathématique, nous avons élaboré des benchmarks de vérification ayant un ordre de précision élevé. Ils sont basés sur des solutions analytiques générées par la méthode de solutions fabriquées (MMS). Cette méthode, combinée avec le test de l'évaluation de l'ordre de précision du schéma numérique utilisé, constitue une activité rigoureuse de vérification du code et de sa solution numérique. La procédure de vérification détaillée le long de ce chapitre peut être appliquée non seulement au code SACATRI, mais à tous les codes thermohydrauliques basés sur l'approche sous-canaux. Elle nous a permis de vérifier tous les termes dérivatifs des EDP du problème. En ce qui concerne la validation du code SACATRI, la comparaison entre les résultats de simulation et les mesures expérimentales a montré que le code SACATRI, produit des résultats satisfaisants dont l'erreur maximale relative calculée ne dépasse pas 6%. L'étude comparative effectuée entre le code SACATRI et le code PANTERA-1P qui est basé sur le code COBRAIIIC, montre que les températures calculées par le code SACATRI sont très proche de celles calculées par le code PANTERA-1P tel que l'écart relatif maximal entre les résultats des deux codes ne dépasse pas 3.8%.

# Chapitre 6

## Simulation thermohydraulique du cœur du réacteur TRIGA MARK II du CENM

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à appliquer le code SACATRI au réacteur TRIGA MARK II du CENM, fonctionnant à une puissance de 2MW, en vue d'étudier le comportement thermohydraulique du fluide réfrigérant circulant entre les éléments combustibles du cœur du réacteur. Il s'agit d'une analyse thermohydraulique préliminaire puisque nous ne disposons pas des données expérimentales ainsi que des données géométriques détaillées propres à ce réacteur. Une modélisation neutronique fine du réacteur a été réalisée moyennant le code MCNP5, afin de déterminer la distribution de la densité de puissance générée par les éléments combustibles. Ce calcul est très primordial, puisque les résultats du calcul neutronique seront utilisés par le code SACATRI.

### 6.2 Carte de puissance du cœur du réacteur TRIGA MARK II-CENM

La détermination de la carte de puissance du cœur du réacteur fait appel à un calcul neutronique rigoureux. Plusieurs codes neutroniques sont disponibles permettant de faire ce calcul. Dans notre étude, nous avons utilisé le code MCNP (X-5, 2003) (Monte-Carlo N-Particule transport) pour calculer le taux de fission dans le cœur du réacteur et à partir

duquel nous pouvons déterminer la distribution de la densité de puissance générée par les éléments combustibles.

### 6.2.1 Le code MCNP

Le code MCNP est un code qui traite le transport des neutrons, photons et électrons par la méthode probabiliste de Monte-Carlo. Il a été développé dans les laboratoires de Los Alamos aux Etats-Unis. Il permet une description détaillée de tous les aspects liés à l'interaction du neutron avec la matière. Ce code, grâce à ses fonctionnalités, possède un nombre important d'applications, notamment en physique des réacteurs, en radioprotection, en médecine, etc. Le code MCNP est largement utilisé par les neutroniciens dans le but de déterminer la distribution du flux neutronique et pour le calcul du coefficient de multiplication effectif ( $K_{eff}$ ). Sa mise à jour régulière et l'élargissement de ses possibilités de simulation en font un code de référence.

La simulation d'un problème donné avec le code MCNP nécessite la détermination des principales données suivantes :

- Description géométrique du problème en 3 dimensions.
- Détermination du type de transport (mode neutron, photon, électron, ou tout mode mixte)
- Définition de la source (nature, énergie, direction, probabilité d'émission des particules, source ponctuelle, surfacique ou volumique, etc.).
- Description détaillée des différents matériaux
- Définition du type de résultat souhaité défini dans le code par « Tally » ( $K_{eff}$ , flux neutronique, etc.).

### 6.2.2 Modélisation du réacteur TRIGA par le code MCNP

L'étude effectuée par l'Equipe Radiation et Systèmes Nucléaires (ERSN), moyennant le code MCNP5, consiste à réaliser une modélisation 3D, qui tient compte de toutes les composantes du cœur du réacteur TRIGA MARK II. Les principaux éléments du cœur du réacteur (éléments combustibles, barres de contrôles, éléments factices en graphites, etc.) qui ont un effet direct sur le calcul neutronique, ont été modélisés aussi fidèlement que possible, en considérant le maximum possible de détails géométriques. Les figures (6.1)-(6.4) représentent quelques coupes radiales et verticales du réacteur TRIGA MARK II, modélisé moyennant le code MCNP5.

---

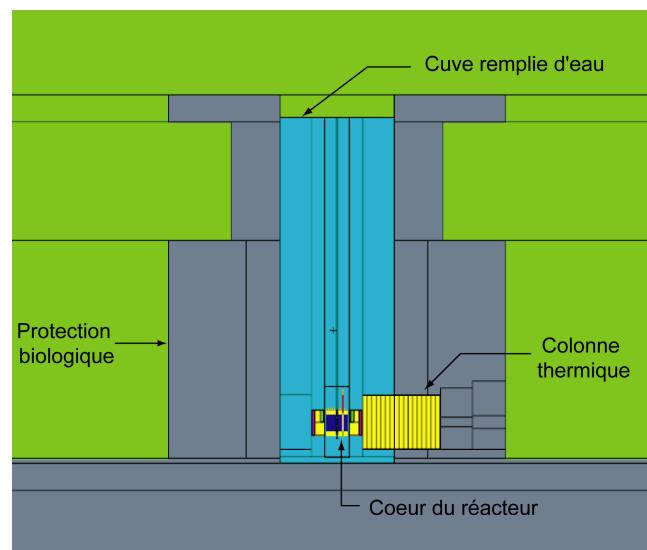


FIG. 6.1 – Coupe verticale du réacteur TRIGA MARK II modélisé par le code MCNP

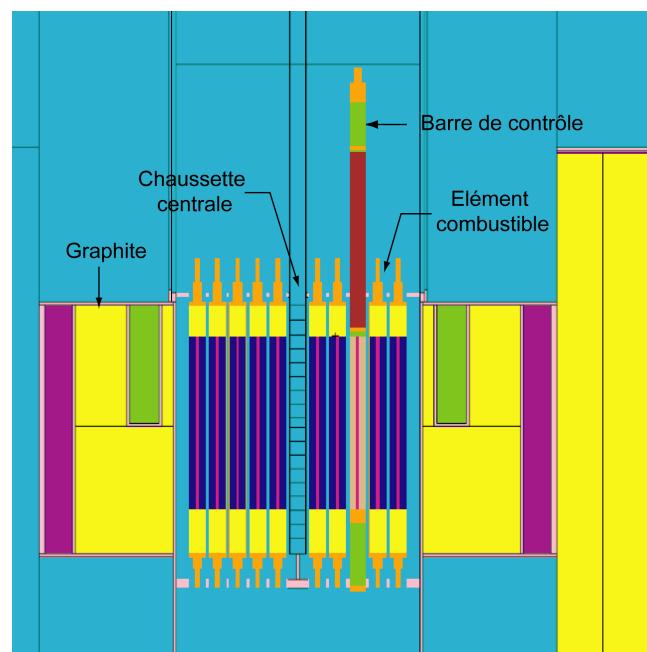


FIG. 6.2 – Coupe verticale du cœur du réacteur TRIGA MARK II modélisé par le code MCNP

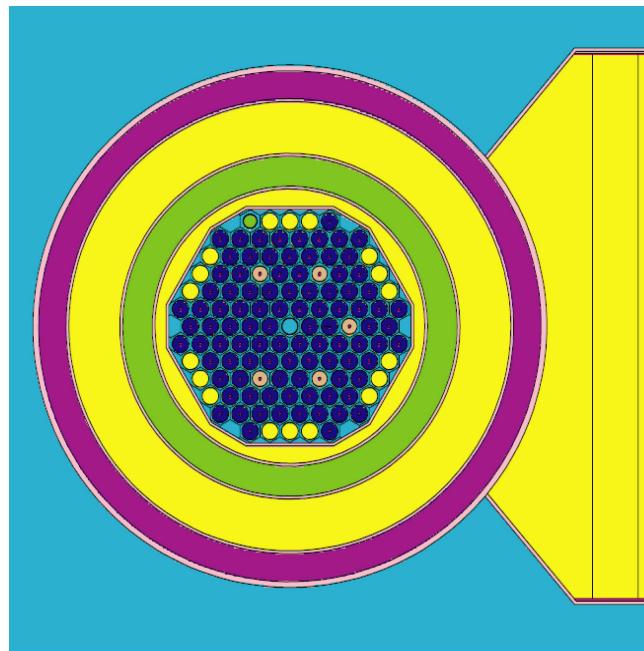


FIG. 6.3 – Coupe radiale du cœur du réacteur TRIGA MARK II modélisé par le code MCNP

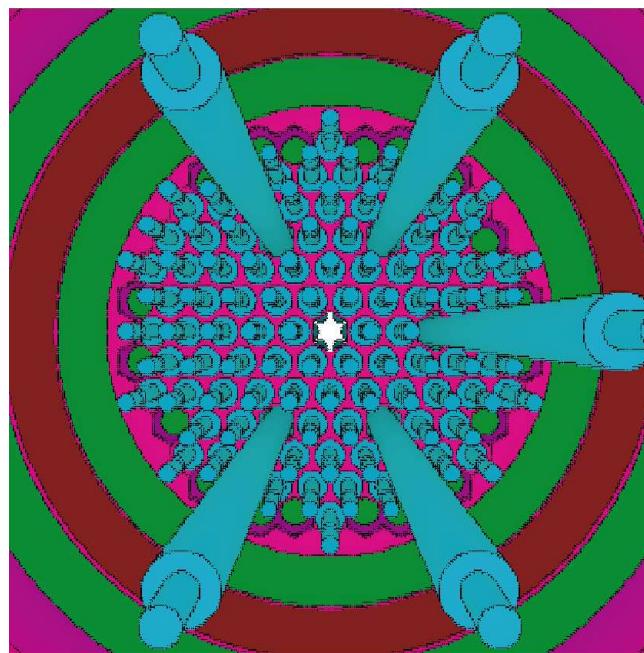


FIG. 6.4 – Coupe radiale en 3D du cœur du réacteur TRIGA MARK II avec les cinq barres de contrôles retirées (modélisation MCNP)

---

### 6.2.3 Distribution de la puissance dans le cœur du réacteur

Les facteurs de pic de puissance (Power Peaking Factors) sont le lien entre le calcul neutronique et l'analyse thermohydraulique du cœur d'un réacteur nucléaire, puisqu'ils définissent la puissance maximale libérée localement dans le cœur. Pour les réacteurs de type TRIGA, deux facteurs de pic de puissance sont généralement utilisés (Ravnik, 1990 ; Snoj, 2008) :

- Le facteur de pic de puissance pour l'élément chaud  $f_{HR}$  (Hot Rod Peaking Factor).
- Le facteur de pic de la densité de puissance totale  $f_{tot}$ .

Le facteur  $f_{HR}$  est défini par le rapport entre la puissance maximale libérée par un élément combustible  $(P_{rod})_{max}$  et la puissance moyenne de l'élément combustible  $(P_{rod})_{av}$  dans le cœur :

$$f_{HR} = \frac{(P_{rod})_{max}}{(P_{rod})_{av}} \quad (6.1)$$

$(P_{rod})_{av}$  est défini par :

$$(P_{rod})_{av} = \frac{P}{N} \quad (6.2)$$

avec  $P$  est la puissance du réacteur et  $N$  est le nombre d'éléments combustibles dans le cœur.

D'autre part,  $f_{tot}$  est donnée par le rapport entre la densité maximale de puissance  $(P)_{max}$  et la densité de puissance moyenne  $(P)_{av}$  dans le cœur :

$$f_{tot} = \frac{P_{max}}{P_{av}} \quad (6.3)$$

La distribution de la densité de puissance  $P(x, y, z)$  dans le cœur des réacteurs TRIGA est approximativement proportionnelle à la distribution du flux thermique. Généralement, la variation radiale de  $P$  est beaucoup plus importante que celle dans la direction axiale. Donc  $f_{tot}$  peut être divisé en deux sous-facteurs :

- Facteur de pic de la densité de puissance axiale  $f_z$ .
- Facteur de pic de la densité de puissance radiale  $f_r$ .

Le facteur  $f_r$  est donné par le rapport entre la densité de puissance maximale intégrée, dans un point particulier ( $x, y$ ), sur toute la hauteur active de l'élément combustible ( $L$ ) et la densité de puissance moyenne :

$$f_r = \frac{\left( (1/L) \int_L dz p(x, y, z) \right)_{\max}}{\left( (1/L) \int_L dz p(x, y, z) \right)_{av}} = \frac{(P_r(x, y))_{\max}}{(P_r(x, y))_{av}} \quad (6.4)$$

Le résultat de calcul de  $f_r$  pour le réacteur TRIGA MARK II, moyennant le code MCNP5, est représenté sur la figure (6.5). Les résultats sont obtenus avec une déviation standard inférieure à 7pcm pour le coefficient de multiplication effectif ( $K_{eff}$ ). L'erreur statistique relative concernant le taux de fission ne dépasse guère 1%. La configuration du cœur du réacteur TRIGA MARK II avec laquelle nous avons effectué le calcul neutronique est représentée sur la figure (6.6).

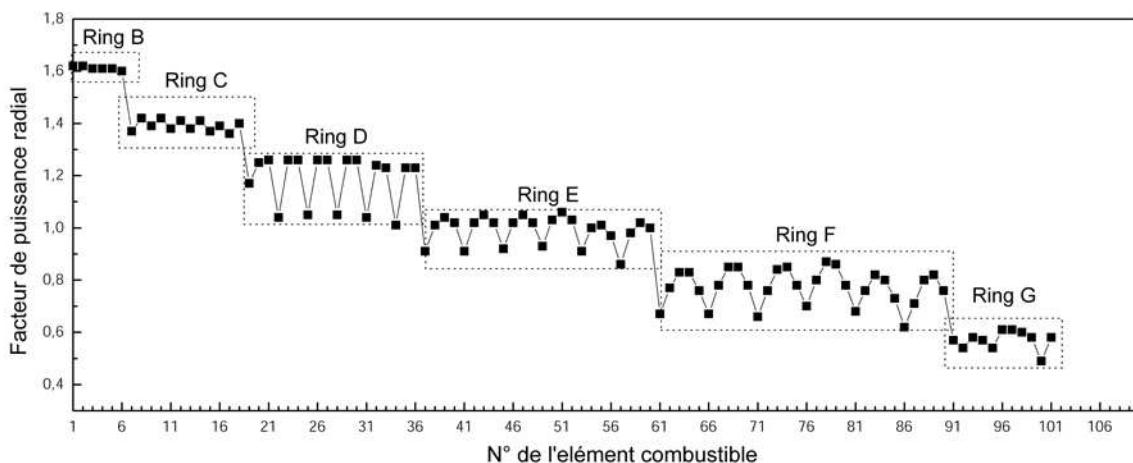


FIG. 6.5 – Distribution du facteur de pic de la puissance radiale dans le cœur du réacteur TRIGA MARK II

Nous remarquons que le facteur de pic de la puissance radiale est élevé pour les éléments combustibles du Ring B. La valeur maximale est obtenue sur la barre  $B_2$  et vaut 1.614, ce qui la qualifie comme étant l'élément le plus chaud du cœur du réacteur. Nous signalons que la valeur donnée par GA de ce facteur est comprise entre 1.6 et 1.7. Le facteur de pic de la puissance radiale diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers la périphérique du cœur du réacteur où il devient inférieur à 0.8. Nous notons aussi que la valeur du pic de puissance radiale est presque la même sur les 6 éléments combustibles du Ring B et les 12 éléments du Ring C. Ce facteur commence à être non uniforme à partir du Ring D et jusqu'au Ring G. Pour le Ring D, cette variation est due à la présence des barres de contrôles qui influent sur le flux neutronique ; ce qui explique cette variation en dents de scie. Le même comportement est observé sur les Rings E, F et G, mais cette fois-ci, à cause des éléments en graphite qui entourent le cœur du réacteur.

## 6.2. CARTE DE PUISSANCE DU CŒUR DU RÉACTEUR TRIGA MARK II-CENM 179

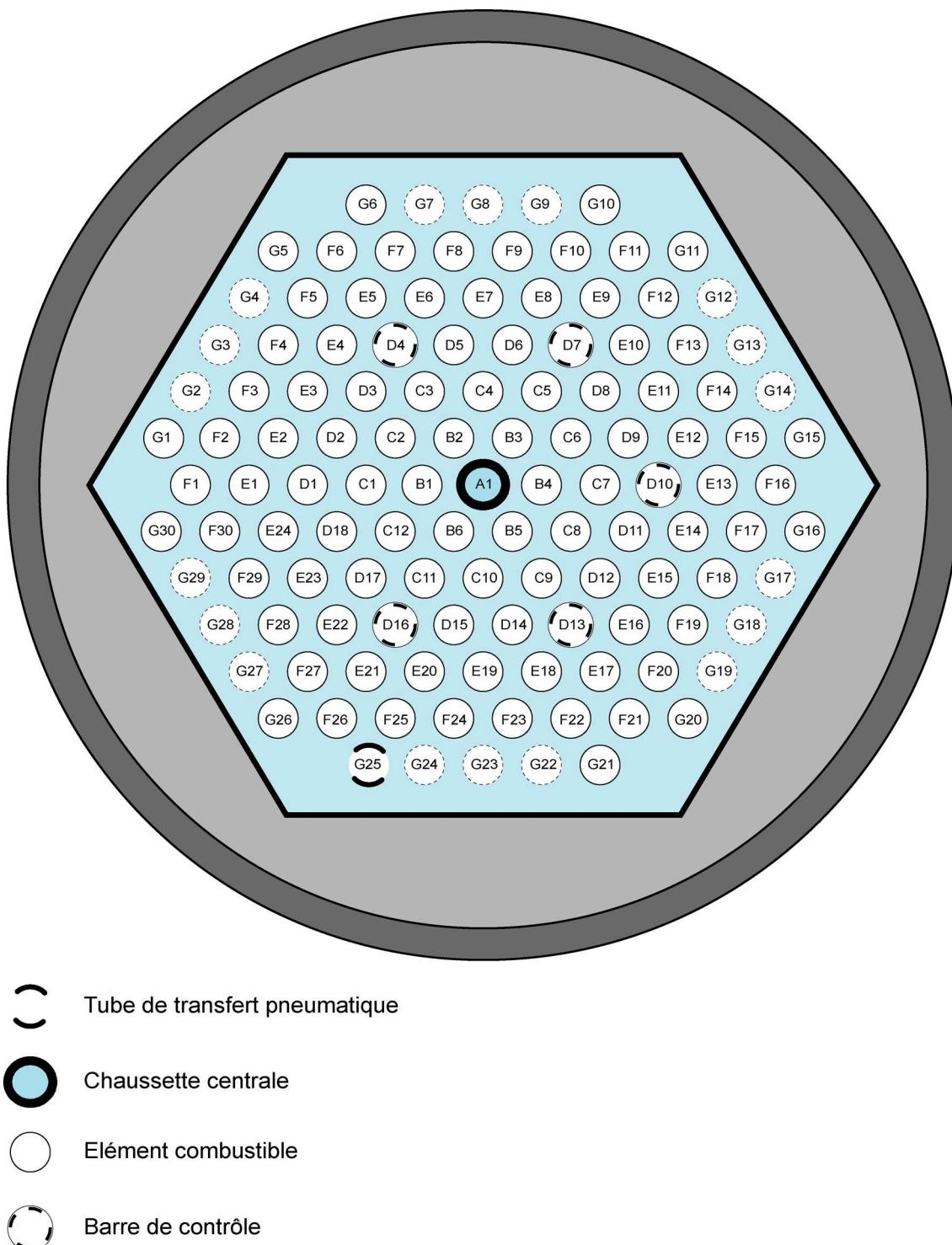


FIG. 6.6 – La configuration du cœur du réacteur TRIGA MARK II avec laquelle le calcul neutronique est effectué

Lors de la définition de  $f_z$  pour les réacteurs de type TRIGA, la densité de puissance  $P(x, y, z)$  est généralement décomposée en une puissance radiale  $P(x, y)$  et une puissance axiale  $P(z)$  :

$$P(x, y, z) \cong P(x, y)P(z) \quad (6.5)$$

Donc  $f_{tot}$  est réécrit ici par :

$$f_{tot} = \frac{(P_r(x, y, z))_{\max}}{(P_r(x, y, z))_{av}} = \frac{(P_r(x, y))_{\max}}{(P_r(x, y))_{av}} \frac{(P_r(z))_{\max}}{(P_r(z))_{av}} = f_r f_z \quad (6.6)$$

tel que  $f_z$  est donné par :

$$f_z = \frac{(P_r(z))_{\max}}{(P_r(z))_{av}} \quad (6.7)$$

Donc, la procédure du calcul de  $f_{tot}$ , en le décomposant en deux facteurs indépendants, simplifie énormément le calcul. Particulièrement, pour les réacteurs TRIGA, les erreurs résultantes introduites par cette approximation sont très faibles.

Le calcul de  $f_z$  résulte d'une difficulté énorme, à cause des faibles dimensions physique du cœur. Les études expérimentales ont montré une distribution presque sinusoïdale (chopped cosine) de la puissance axiale, avec un pic d'environ 1.3, obtenu pour tous les éléments du cœur et avec n'importe quelle configuration (Ravnik, 1990 ; Snoj, 2008).

D'autre part, GA donne une valeur du pic de la distribution  $f_z$  comprise entre 1.25 et 1.3. Par exemple, pour le réacteur TRIGA MARK I de l'université de New York, de puissance 250 kW avec 62 éléments combustibles, le pic de  $f_z$  est 1.25, tandis qu'il est de l'ordre de 1.3 pour le réacteur TRIGA MARK III de Torrey Pines ayant une puissance de 2MW et dont le cœur est rempli de 100 éléments combustibles.

Pour calculer la distribution de  $f_z$  pour le réacteur TRIGA MARK II du Maroc, nous avons divisé la partie active des éléments constituant chaque ring du cœur du réacteur (B, C, D, E et F) en plusieurs cellules de volumes identiques (figure 6.7). Sur chaque cellule, la densité de fission a été calculée par le code MCNP5 et par conséquent, la distribution du facteur de puissance axiale  $f_z$ .

Les deux figures (6.8) et (6.9) présentent la distribution de  $f_z$  en fonction de la position axiale de la partie active de l'élément combustible et des barres de contrôles à prolongateur combustible respectivement. L'analyse de ces résultats, montre que la valeur moyenne du pic de la distribution du facteur de puissance axiale est de l'ordre de 1.27. Cette valeur est inclue dans l'intervalle donné par GA.

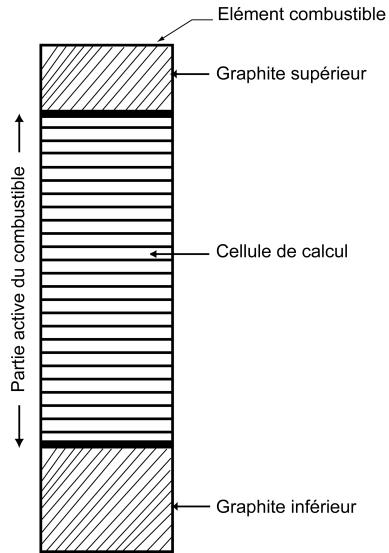


FIG. 6.7 – Discréétisation axiale en cellules de volumes identiques d'un élément combustible du cœur du réacteur TRIGA MARK II

D'autre part, nous remarquons que la distribution de  $f_z$  subit une légère augmentation aux extrémités de la partie active des éléments combustibles. Ce comportement est normal à cause des continuités en graphite attachées en dessous et au dessus du combustible. En plus, cette augmentation est plus notable vers la partie inférieure du combustible, puisque la longueur du graphite d'en bas est supérieure à celle du graphite d'en haut (9.4 et 6.6cm respectivement). Ceci fait augmenter le pouvoir de réflexion des neutrons dans la partie inférieure du combustible.

Ce comportement de la distribution de  $f_z$  vers les extrémités du combustible disparaît sur les extrémités du combustible des barres de contrôles à cause de l'absence du graphite.

La distribution calculée de  $f_z$ , doit être implémentée dans le code SACATRI. Pour que cette distribution soit valable quelque soit la discréétisation axiale utilisée dans le sous-canal, nous avons approché la distribution de  $f_z$  par un lissage gaussien (figure 6.10). L'accroissement de  $f_z$  vers les extrémités du combustible n'est pas pris en considération.

La fonction résultante de cet lissage est donnée par :

$$f_z(z) = G_0 + \left( \frac{\alpha}{\alpha' \sqrt{\pi/2}} \right) \exp \left[ -2 \left( \frac{(z - z_c)}{\alpha'} \right)^2 \right] \quad (6.8)$$

Les différents coefficients de la fonction  $f_z(z)$  sont résumés dans le tableau (6.1).

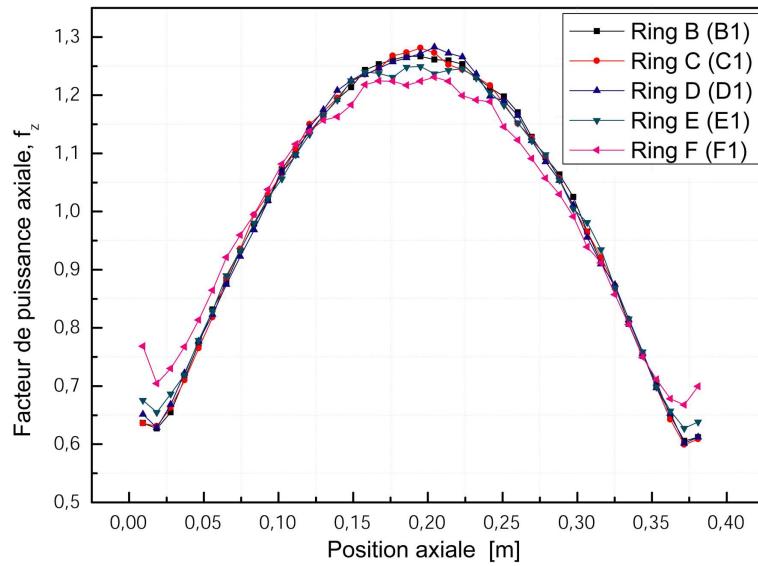


FIG. 6.8 – Distribution du facteur de puissance axiale  $f_z$  le long de la partie active de quelques éléments combustibles du cœur du réacteur TRIGA MARK II

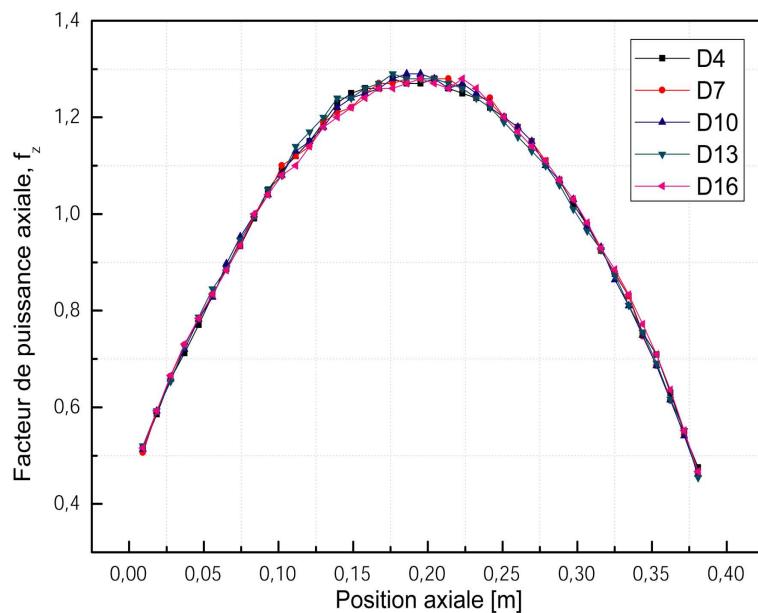


FIG. 6.9 – Distribution du facteur de puissance axiale  $f_z$  le long de la partie active des barres de contrôles du cœur du réacteur TRIGA MARK II

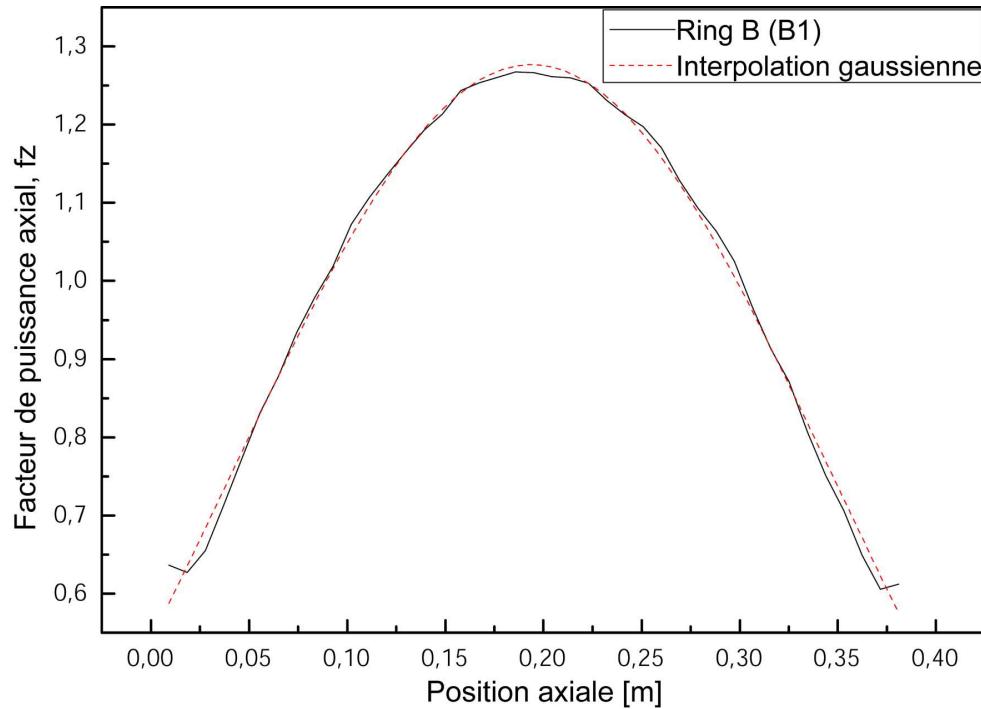


FIG. 6.10 – Lissage gaussien de la distribution de la puissance axiale  $f_z$  en fonction de la longueur axiale de la partie active de l’élément combustible

TAB. 6.1 – Les différents coefficients résultant du lissage gaussien de la distribution de la puissance axiale  $f_z$

$G_0$	-0.05912
$z_c$	0.1939
$\alpha'$	0.30666
$\alpha$	0.51341

## 6.3 Simulation thermohydraulique du cœur du réacteur TRIGA MARK II

### 6.3.1 Discrétisation du cœur en sous-canaux

La figure (6.11) représente la discrétisation en sous-canaux que nous avons utilisée dans le cas du réacteur TRIGA MARK II. Le cœur du réacteur est discrétisé en 258 sous-canaux, dont 30 sont des sous-canaux latéraux, 6 sont des sous-canaux de coin, et le reste représente des sous-canaux triangulaires. Nous avons utilisé plusieurs sous-canaux afin d'obtenir le maximum d'informations sur l'écoulement et plus d'exactitude sur la distribution des différents paramètres thermohydrauliques.

Les différentes données géométriques utilisées dans la détermination des paramètres thermohydrauliques des sous-canaux sont résumées dans le tableau (6.2).

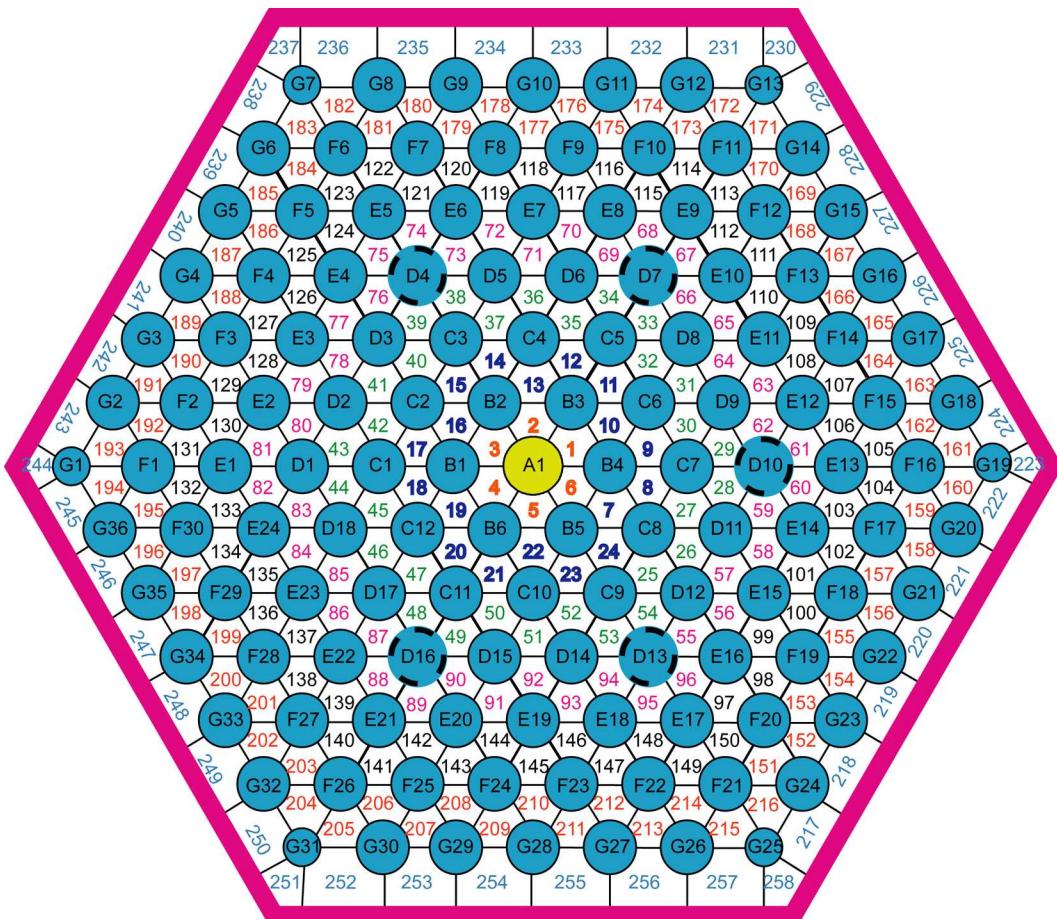


FIG. 6.11 – Discrétisation en sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II

TAB. 6.2 – Données géométriques et physiques utilisées pour le calcul des paramètres thermohydrauliques des sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II

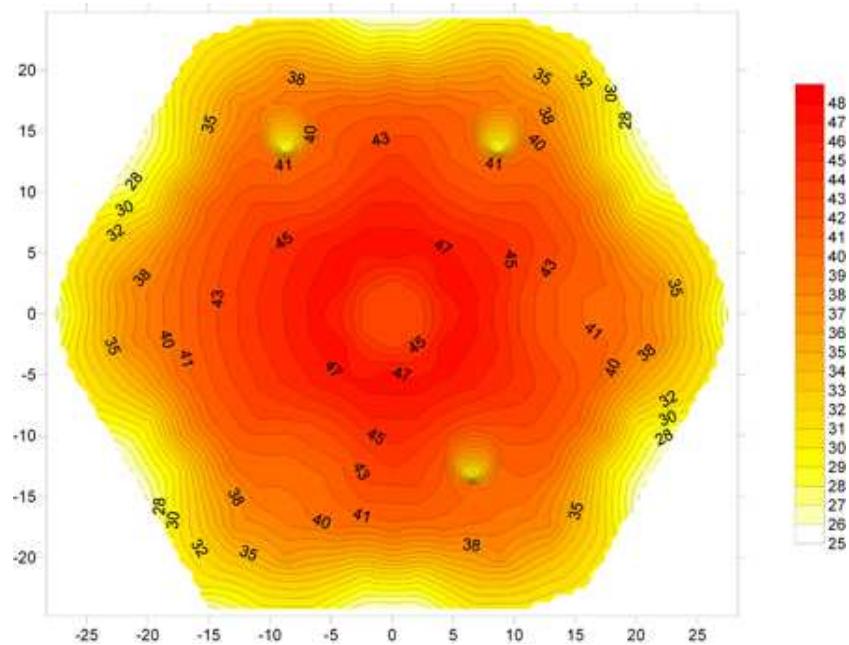
Puissance totale du réacteur [MW]	2.00
Température de l'eau à l'entrée du cœur [°C]	25.00
Facteur de pic de puissance axial	1.27
Pression [bar]	1.7
Diamètre du combustible [m]	0.0373
Diamètre des barres de contrôles [m]	0.0349
Diamètre de la chaussette centrale [m]	0.0381
Pitch [m]	0.043536
La partie non chauffée en graphite à l'entrée du sous-canal [m]	0.0940
La partie non chauffée en graphite à la sortie du sous-canal [m]	0.0660
La partie active du combustible [m]	0.3810
Longueur total du sous-canal (L) [m]	0.541
Coefficient de pertes de charges singulières à l'entrée des sous-canaux ( $K_e$ )	3.195
Coefficient de pertes de charges singulières à la sortie des sous-canaux ( $K_r$ )	2.025

### 6.3.2 Distribution de la température et du débit de masse

La simulation thermohydraulique du cœur entier du réacteur TRIGA MARK II a été effectué à une température d'entrée de l'eau de refroidissement de 25 °C et pour une puissance totale du réacteur de 2MW.

Les figures (6.12) et (6.13) représentent respectivement la distribution de la température radiale au niveau du plan médian ( $z = L/2$ ) et à la sortie du cœur du réacteur ( $z = L$ ). D'après ces figures, la température maximale de sortie est obtenue sur le sous-canal 16 et elle est de l'ordre de 82.54 °C. Le sous-canal 16 est considéré comme étant le sous-canal le plus chaud du cœur du réacteur avec une puissance maximale dissipée de 15.27 kW/m.

La température de sortie est influencée par la présence des barres de contrôles ayant un facteur de pic de puissance radiale relativement inférieur à celui des éléments combustibles-modérateurs. Par conséquent, à la sortie des sous-canaux entourant les barres de contrôles, particulièrement les barres  $D_4$ ,  $D_7$  et  $D_{13}$ , nous remarquons que la température est plus faible par rapport à la température des sous-canaux voisins. Généralement, sur chaque ring du cœur du réacteur, la température est presque uniforme, vu que les éléments combustibles constituant chaque ring ont presque la même puissance. La température la plus faible est celle qui correspond aux sous-canaux qui sont proches du réflecteur ou bien des barres de contrôles.



D'après la figure (6.14) qui représente la variation de la température de sortie moyennée sur les sous-canaux de chaque ring, cette dernière décroît au fur et à mesure que l'on s'approche de la périphérique du cœur où les puissances sont généralement faibles ou nulles.

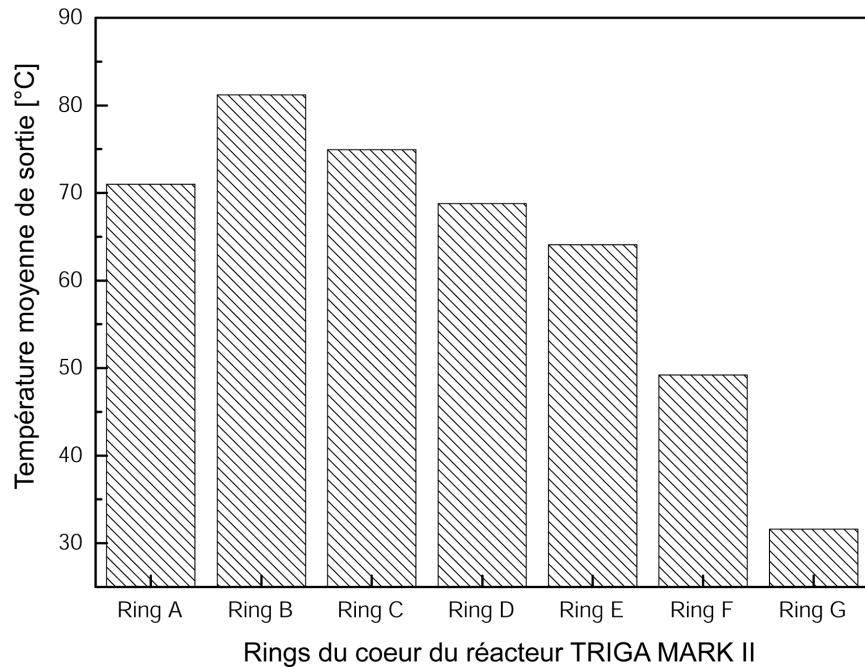


FIG. 6.14 – Température moyenne calculée à la sortie des sept rings du cœur du réacteur TRIGA MARK II

Pour les sous-canaux du premier ring, la température moyenne de sortie est inférieure à celles des rings B et C. Le passage du ring A vers le ring B est accompagné par une augmentation de la température de sortie. Ceci n'est pas dû à une augmentation de la puissance des piles à combustibles, mais à la présence de la chaussette centrale (remplie d'eau) au centre du cœur réacteur.

Les figures (6.15) et (6.16) représentent respectivement la distribution de la température et de la densité de l'eau, en fonction de la longueur axiale, dans quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II. A partir de ces figures, il est clair que la température est élevée dans les sous-canaux situés près du centre du cœur réacteur (sous-canaux 2, 8, 16 et 36). Sur le sous-canal 234, la température est presque constante le long du sous-canal où sa valeur est égale à la température d'entrée ( $25^{\circ}\text{C}$ ). Ceci est dû à une puissance nulle dans ce sous-canal qui n'est entouré que par des éléments factices en graphite.

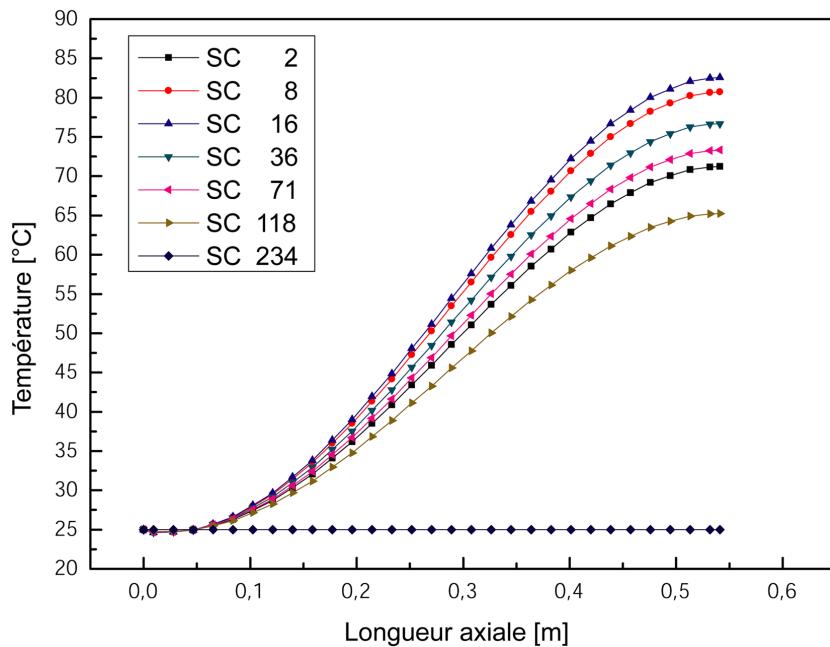


FIG. 6.15 – Distribution de la température le long de quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II

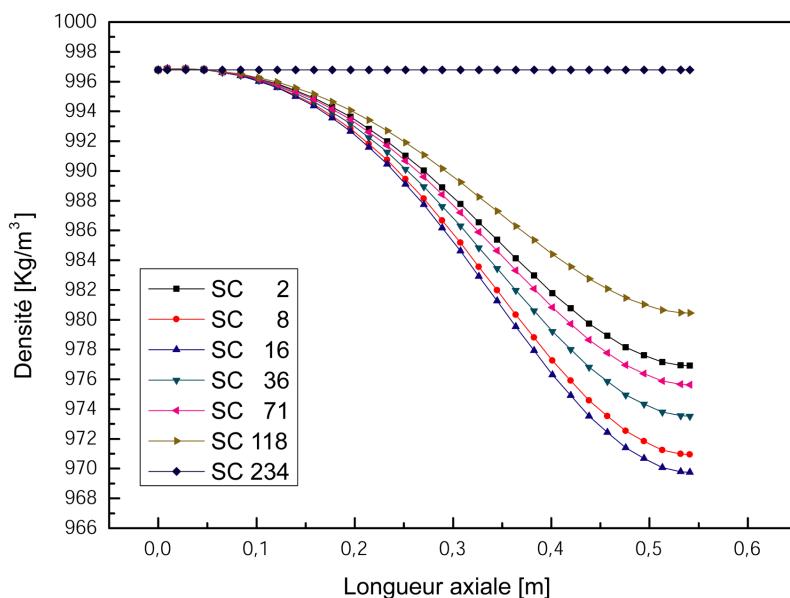


FIG. 6.16 – Distribution de la densité de l'eau le long de quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II

La figure (6.17) représente la distribution du débit de masse en fonction de la longueur axiale de quelques sous-canaux du cœur du réacteur. Nous constatons que la valeur du débit varie selon la densité de puissance dissipée dans les sous-canaux. Ainsi, les débits les plus élevés sont obtenus aux sous-canaux des rings les plus proches du centre du réacteur (ring B, C et D), à l'exception des sous-canaux du premier ring à cause de l'existence de la chaussette centrale remplie de l'eau. Le débit massique maximal est obtenu sur le sous-canal 16 telle que sa valeur moyenne est de l'ordre de 267.3 [kg/m<sup>2</sup> sec] qui correspond à une vitesse du fluide de 0.271 [m/sec].

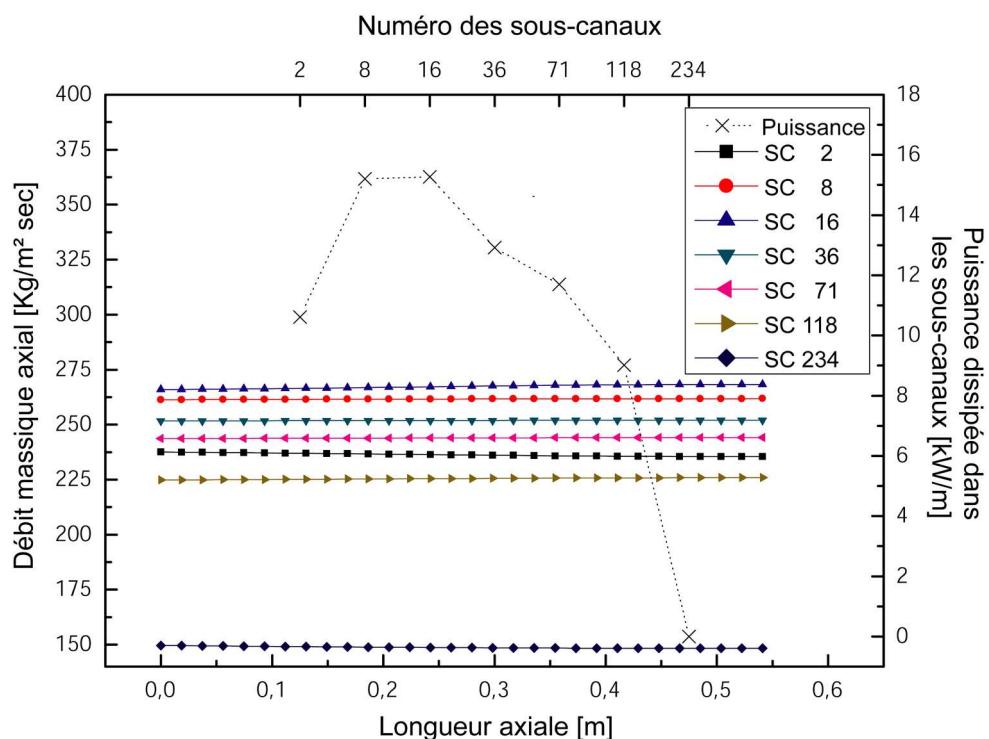


FIG. 6.17 – Distribution du débit massique axial dans quelques sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II

En général, la distribution du débit massique axial dans les sous-canaux du cœur du réacteur TRIGA MARK II est presque constante le long du sous-canal avec une légère variation. Ceci est dû à l'apport de masse issue latéralement des sous-canaux voisins. Cette distribution constante du débit est une caractéristique propre aux réacteurs de recherches, spécialement les réacteurs de type TRIGA fonctionnant en régime de convection naturelle.

La différence entre le débit massique axial entrant ( $\dot{m}_{\text{In}}$ ) et sortant ( $\dot{m}_{\text{Out}}$ ) pour différents sous-canaux du cœur du réacteur est représentée sur les figures (6.18)-(6.20). L'analyse de ces résultats nous indique l'importance du taux d'échange massique se déroulant latéralement entre les sous-canaux, ainsi que la direction du débit massique latéral. Par

exemple, pour les sous-canaux du ring A, nous constatons que le débit massique axial à la sortie des sous-canaux est inférieur en moyenne, d'environ 2 [kg/m<sup>2</sup> sec], de celui à l'entrée des sous-canaux. Ceci est expliqué par le fait que la quantité de masse qui a été perdue dans ces sous-canaux a été transportée latéralement vers les sous-canaux du ring B. Ce phénomène est dû à un gradient de pression remarquable entre les sous-canaux des rings A et B. Le même raisonnement reste valable pour tous les sous-canaux du cœur du réacteur tel que la distribution de la puissance, et par conséquent, le champ de pression qui en résulte, détermine la quantité et la direction du flux massique transversal.

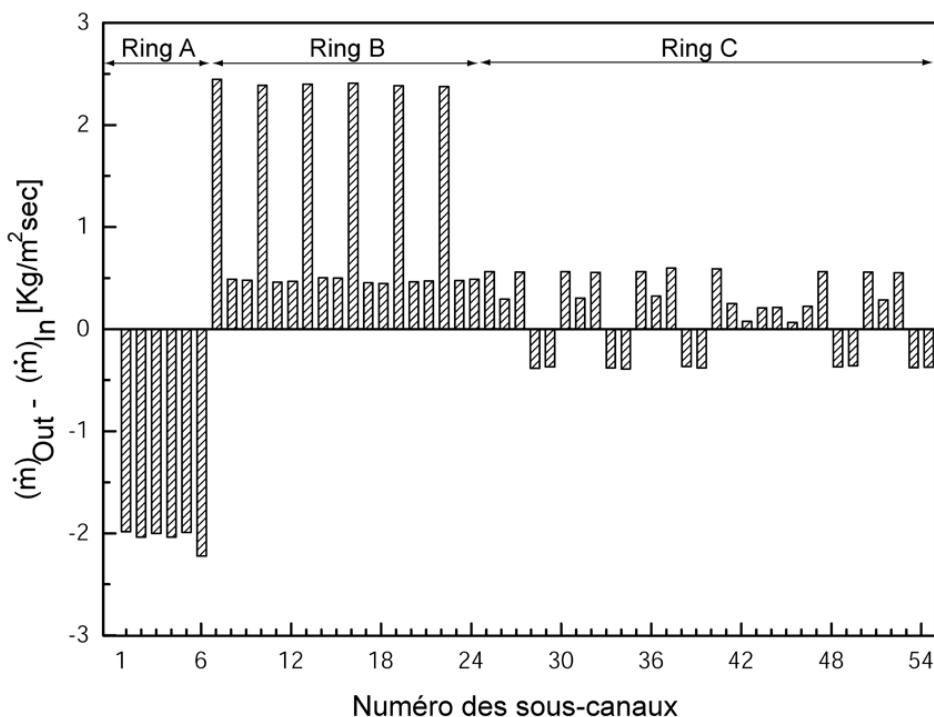


FIG. 6.18 – Différence entre le débit massique axial entrant et sortant des sous-canaux des rings A, B et C

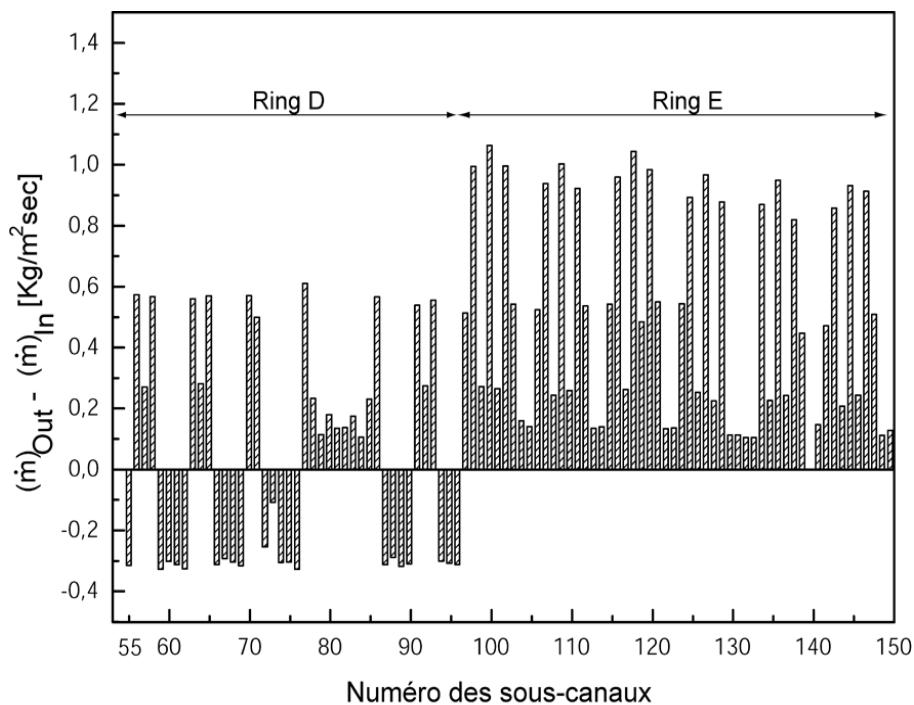


FIG. 6.19 – Différence entre le débit massique axial entrant et sortant des sous-canaux des rings D et E

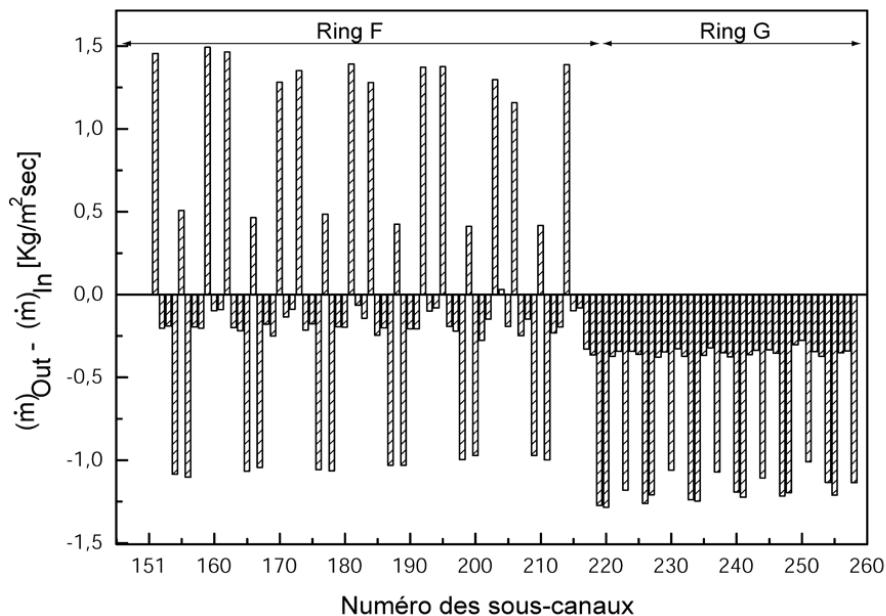


FIG. 6.20 – Différence entre le débit massique axial entrant et sortant des sous-canaux des rings F et G

### 6.3.3 Effet de la température d'entrée du réfrigérant

Les calculs thermohydrauliques, effectués précédemment, ont été réalisés pour une température d'entrée du cœur de 25 °C permettant d'avoir une température moyenne de sortie de l'ordre de 75°C (moyennée sur les rings A, B et C). En effet, la variation de la température d'entrée influence sur la valeur de la température de sortie de l'eau ainsi que sur le flux de masse circulant entre les éléments combustibles.

Pour tester l'effet de la température d'entrée, nous l'avons variée entre 25 °C et 45 °C qui est considérée comme étant la température maximale d'entrée du cœur du réacteur TRIGA MARK II (GA, 1993). Les résultats obtenus à l'aide du code SACATRI sont présentés sur la figure (6.21) et (6.22).

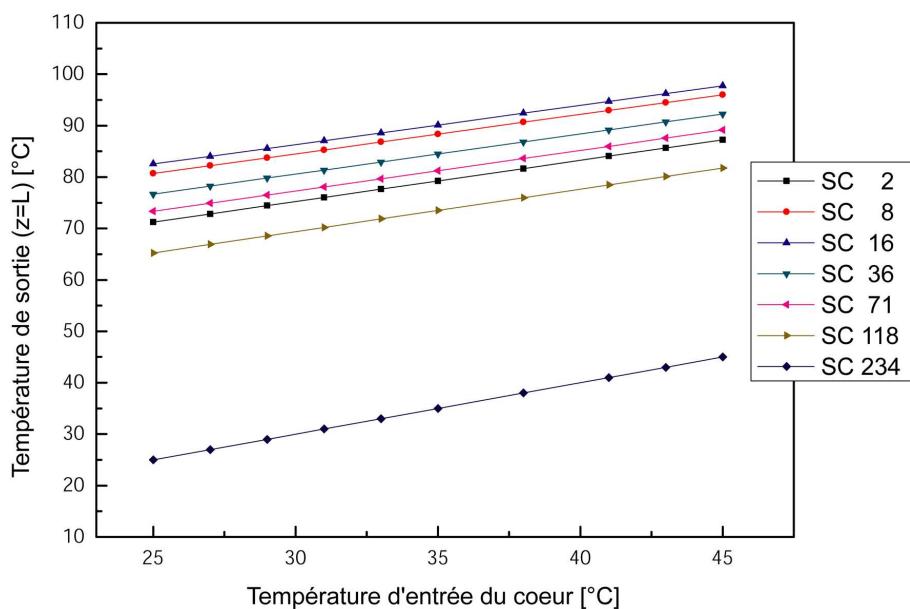


FIG. 6.21 – Variation de la température de sortie en fonction de la température d'entrée du cœur du réacteur TRIGA MARK II

Nous remarquons que la température de sortie ainsi que le débit massique axial augmente linéairement au fur et à mesure que la température d'entrée de l'eau augmente. À une température d'entrée de 45°C, la température de sortie de l'eau dépasse les 95 °C pour le sous-canal 16 (canal chaud). Cette température correspond à un débit massique moyen dans le sous-canal de l'ordre de 291 [kg/m<sup>2</sup> sec]. Pour le sous-canal 234, ayant une puissance nulle, quelque soit la variation de la température d'entrée, la température de sortie de l'eau garde presque la même température d'entrée avec une faible diminution du débit de massique axial.

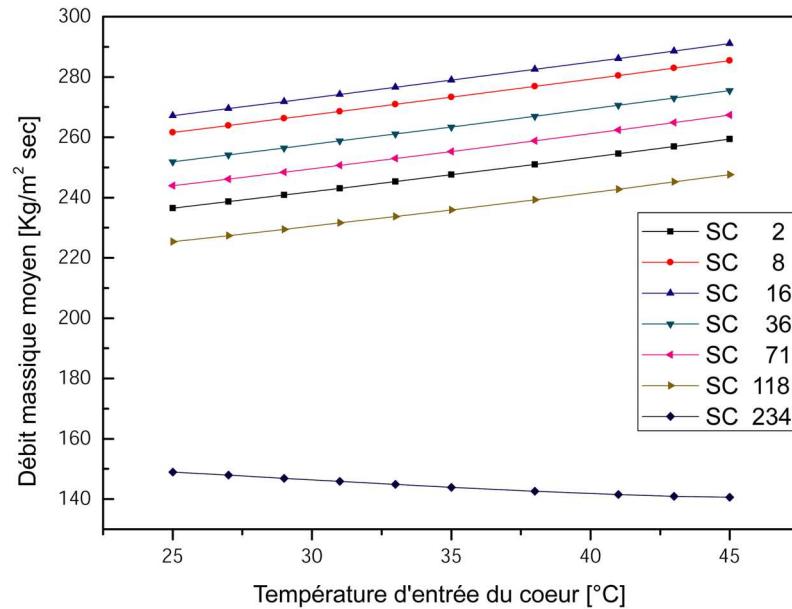


FIG. 6.22 – Variation du débit massique axial moyen en fonction de la température d'entrée du cœur du réacteur TRIGA MARK II

Sur les figures (6.23) et (6.24), nous représentons la distribution de la température à la sortie du cœur du réacteur à une température d'entrée de  $33^{\circ}\text{C}$  et de  $45^{\circ}\text{C}$  respectivement. La température moyenne de l'eau à la sortie, pour une température d'entrée de  $45^{\circ}\text{C}$ , est de l'ordre de  $80,2^{\circ}\text{C}$  (moyennée sur tous les rings du cœur, hormis le dernier ring).

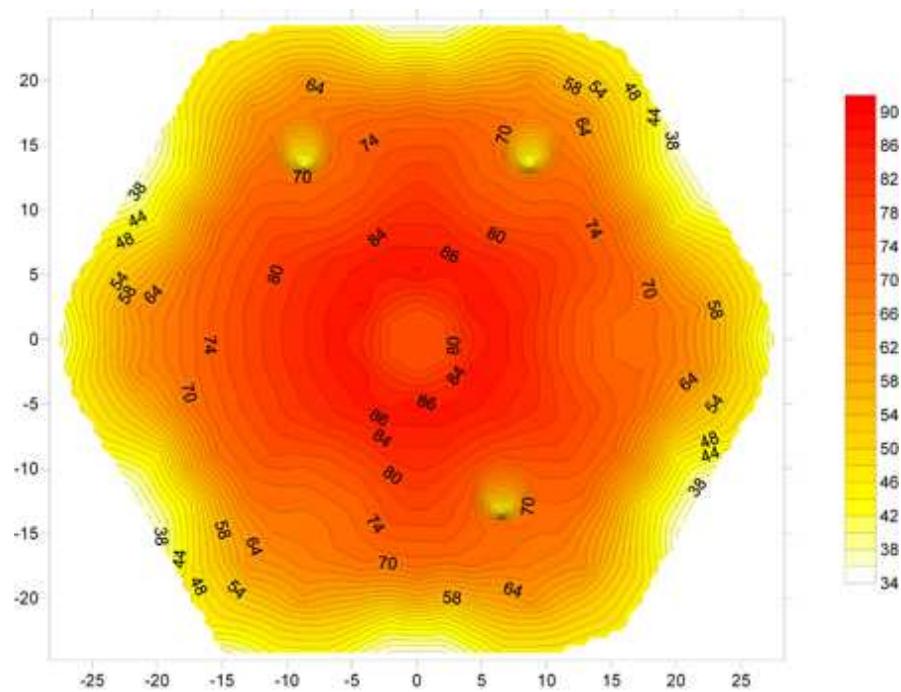


FIG. 6.23 – Distribution de la température de sortie du cœur du réacteur TRIGA MARK II pour une température d’entrée de 33°C

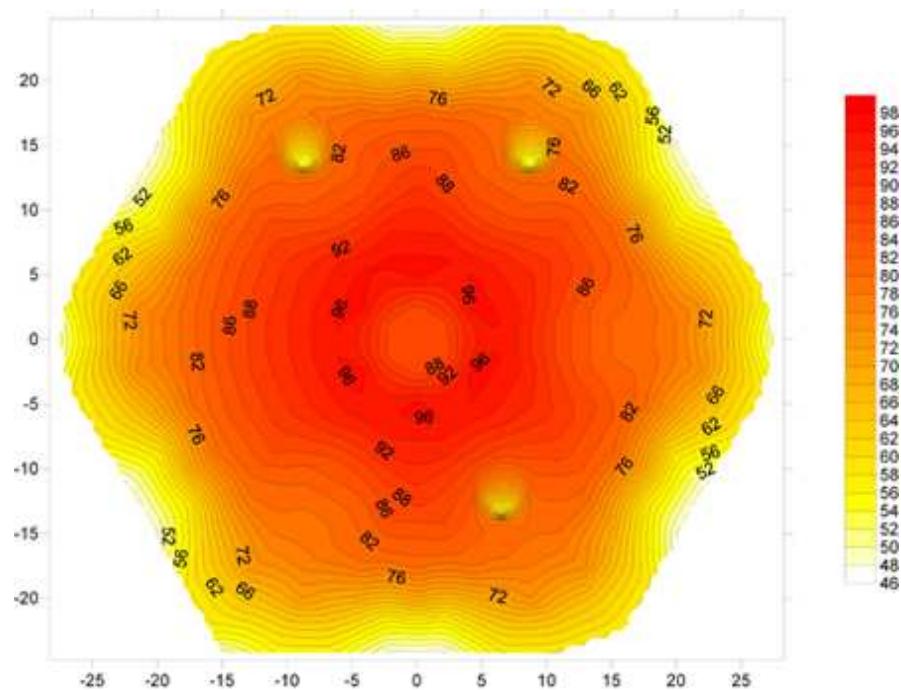


FIG. 6.24 – Distribution de la température de sortie du cœur du réacteur TRIGA MARK II pour une température d’entrée de 45°C

### 6.3.4 Effet de la puissance du réacteur

Dans les conditions normales de fonctionnement du réacteur TRIGA MARK II, la puissance totale nominale du cœur est de 2MW. Cependant, rien n'empêche que le réacteur fonctionne à des puissances inférieures à cette valeur. Par exemple si on veut réaliser des expériences à froid, le réacteur doit être mis en service à des faibles puissances. Dans ce contexte, nous essayons de dépister l'effet de la variation de la puissance totale du réacteur sur le comportement de quelques paramètres thermohydrauliques, notamment la température de sortie et le débit massique axial du fluide réfrigérant. Pour ceci, nous avons simulé le comportement thermohydraulique du cœur du réacteur pour une température d'entrée de 25°C et en utilisant les puissances suivantes ; 250 kW, 500 kW, 1000 kW, 1.5 MW et 2 MW. Les différents résultats obtenus sont représentés sur les figures (6.25) et (6.26).

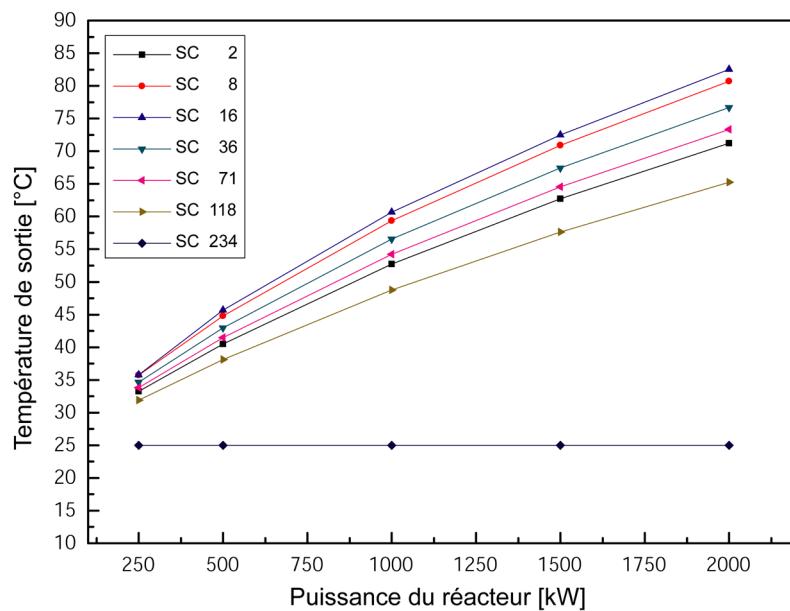


FIG. 6.25 – Variation de la température de sortie en fonction de la puissance de fonctionnement du réacteur TRIGA MARK II

L'analyse de ces résultats montre que la diminution de la puissance du réacteur est accompagnée par une décroissance de la température de sortie de l'eau ainsi que du débit massique axial.

Une variation moyenne d'environ 500kW de la puissance du réacteur correspond à une variation de 10 °C de la température à la sortie des sous-canaux et de 24 [kg/m<sup>2</sup> sec] pour le débit de masse axial.

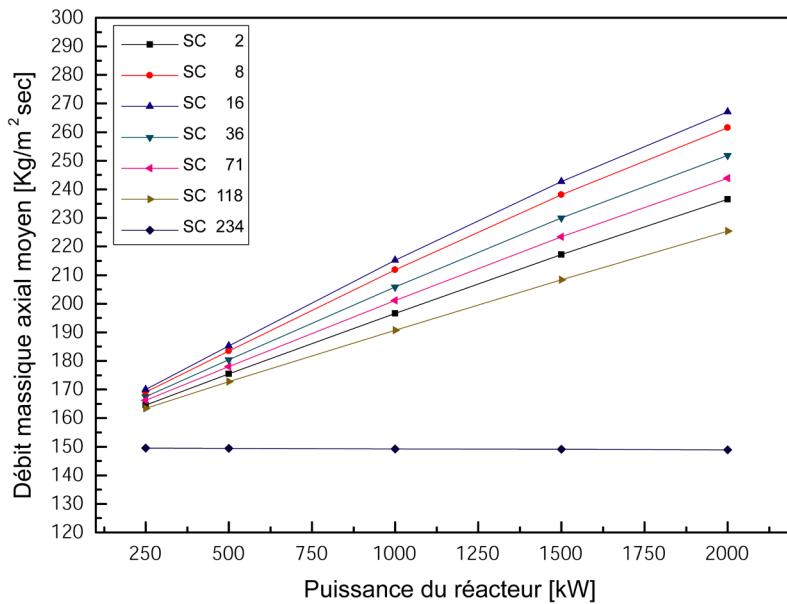


FIG. 6.26 – Variation du débit massique axial en fonction de la puissance de fonctionnement du réacteur TRIGA MARK II

A la puissance nominale de 250 kW, les températures de sortie dépasse à peine les 35 °C avec un débit massique très faible (165 [kg/m<sup>2</sup> sec] en moyenne). Donc, jusqu'à une puissance de 250 kW, les conditions thermohydrauliques restent favorables pour la réalisation des expériences à froid.

### 6.3.5 Flux de chaleur critique et point de Burn-out

Nous rappelons que le flux de chaleur critique axial (ACHF) ou bien le point de Burn-out (Departure from Nucleate Boiling « DNB ») est le point, à partir duquel, le film de vapeur couvre complètement la paroi. Ce point est considéré comme étant une transition de l'ébullition nucléée sous-saturée vers l'ébullition en film. Au delà de ce point, le film de vapeur couvre complètement la paroi et l'évacuation de la chaleur se fait principalement sous forme de chaleur latente de vaporisation. La couche de vapeur constitue une résistance thermique additionnelle. Ceci entraîne une augmentation brutale de la température de la gaine, soit jusqu'au point de sa fusion. Par conséquent, il est primordial, du point de vue de la sûreté des réacteurs nucléaires, de déterminer la distribution du flux de chaleur critique et le point de Burn-out afin de garantir le non dépassement des limites de sûreté.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la détermination du ACHF et du DNB pour le

réacteur TRIGA MARK II. Egalement nous étudions l'influence de quelques paramètres clés pour la sûreté des réacteurs (température d'entrée et la vitesse de l'eau ainsi que la puissance totale du réacteur) sur la distribution du ACHF et du DNB. Nous avons déterminé ces deux paramètres dans le sous-canal chaud du réacteur (sous-canal 16).

Le flux de chaleur critique est généralement déterminé par des corrélations empiriques trouvées expérimentalement. Dans la littérature, on compte avoir environ 1000 corrélations développées durant les 50 dernières années (Groeneveld, 2007). Le mécanisme du ACHF est très complexe tel qu'aucune théorie ou équation unique ne peut être appliquée directement pour déterminer le ACHF pour toutes les conditions d'intérêt. Les difficultés augmentent lorsque d'autres facteurs entrent en jeu notamment les transitoires, la non-uniformité de la distribution du flux, etc.

Pour les réacteurs de type TRIGA, on trouve deux corrélations qui peuvent être utilisées pour déterminer le ACHF ; il s'agit de la corrélation de McAdams (1949, 1954) et la corrélation de Bernath (1960). Ces deux corrélations ont été largement utilisées par General Atomics dans des analyses thermohydrauliques internes sur les réacteurs TRIGA. Bien que ces corrélations ont été développées antérieurement (vers les années 50 et 60), pour des écoulements forcés autour d'un cylindre chauffé, elles donnent des résultats très satisfaisants pour des conditions correspondant au fonctionnement normal des réacteurs TRIGA (faible pression et vitesse) (Marcum, 2008 ; Mele, 1992, 1993 ; Veloso, MAF., 2004).

En 1949, McAdams proposa la corrélation suivante :

$$ACHF = A_C (v)^{1/3} (400000 + 4800 (T_{sat} - T_f)) \quad (6.9)$$

avec  $A_c$  est la section chauffée de l'élément combustible,  $v$  est la vitesse de l'écoulement,  $T_{sat}$  et  $T_f$  sont respectivement la température de saturation et la température du fluide.

Vers 1960, Bernath proposa la corrélation suivante :

$$ACHF = h_{s,crit} (T_{s,crit} - T_b) \quad (6.10)$$

tel que le coefficient  $h_{s,crit}$  représente le coefficient d'échange de chaleur du film. Il est donné par :

$$h_{s,crit} = \left( 10890 \left( \frac{D_h}{D_h + D_{fr}} \right) + \Omega v \right) \times 5.678263 \quad (6.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{48}{(D_h)^{0.6}} \text{ pour } D_h \leq 0.03048 \text{ m} \\ &\text{et} \\ \Omega &= 90 + \frac{10}{D_h} \text{ pour } D_h > 0.03048 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.12)$$


---

$T_{s,crit}$ (°C) est la température superficielle au point ACHF. Elle est donnée par :

$$T_{s,crit} = \left[ 57 \ln(P_{abs}) - 54 \left( \frac{P_{abs}}{P_{abs} + 15} \right) - v/4 \right] + 273 [K] \quad (6.13)$$

$D_h$  et  $D_{fr}$  sont respectivement le diamètre hydraulique mouillé et le diamètre de l'élément combustible ou de la surface chauffée.  $P_{abs}$  est la pression absolue exprimée en kPa.  $T_b$  est la température caractéristique du fluide (Bulk temperature).

La corrélation de Bernath a été développée sur la base des données expérimentales pour l'eau sous-refroidie dans des canaux circulaires, rectangulaires et annulaires. Elle est valable pour des pressions comprises entre 1 et 207 bar et pour des vitesses de 0.3 jusqu'à 16.5 m/s.

Dans plusieurs discussions bibliographiques, la corrélation de Bernath a été considérée la plus fiable puisqu'elle donne des valeurs minimales ayant une marge de caléfaction inférieure à celle donnée par les autres corrélations (exemple de la corrélation de McAdams). En plus, le domaine d'applicabilité de la corrélation de Bernath est plus proche des conditions de fonctionnement des réacteurs TRIGA. Donc, en ce qui suit, nous utiliserons la corrélation de Bernath pour déterminer le ACHF et le DNB correspondant.

Le paramètre de Burn-out relatif DNBR est déterminé en calculant le rapport du flux de chaleur critique axial (ACHF) et le flux de chaleur axial local (AHF), soit :

$$DNBR(z_i) = \frac{ACHF(z_i)}{AHF(z_i)} \quad (6.14)$$

La distribution axiale du flux de chaleur critique (ACHF) et du flux de chaleur axial local (AHF), calculés par le code SACATRI en fonction de la longueur axiale active du sous-canal chaud 16, sont représentés sur la figure (6.27). Les résultats obtenus sont calculés pour une température d'entrée maximale du réfrigérant de 45°C.

Le DNBR varie à partir de 3.18 à partir de la partie active du sous-canal jusqu'à un minimum de 1.96 qui correspond au pic du flux de chaleur local qui se produit au plan médian de l'élément combustible. Cette région, du début de la partie active jusqu'à le MDNBR, correspond à la zone de l'ébullition nucléée sous-saturée où les premières bulles de vapeur commencent à se former. Ensuite, il remonte jusqu'à une valeur de 4.29 ( $z = 0.381$ ). Cette zone, de longueur environ 0.19m correspond à la région de l'ébullition nucléée saturée ou la région de transition entre l'ébullition nucléée et l'ébullition en film (saturated nucleate boiling).

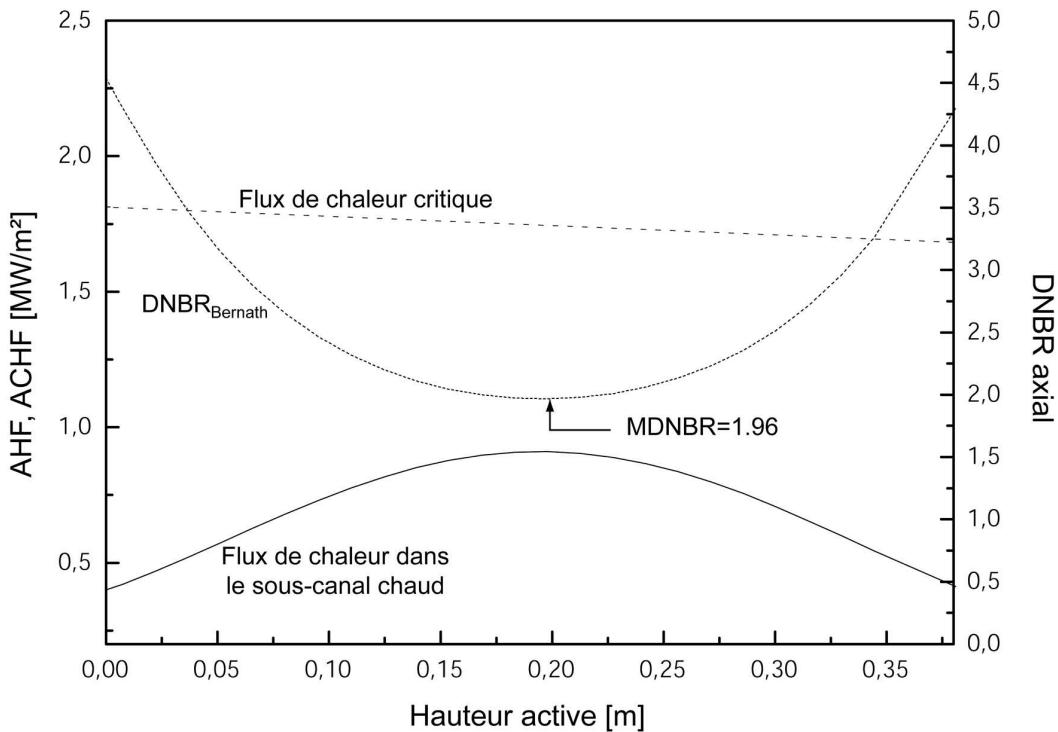


FIG. 6.27 – Variation du flux de chaleur axial local, flux de chaleur critique axial et du DNBR en fonction de la position axiale dans le sous-canal 16 pour une température d'entrée de l'eau de 45°C

Le flux de chaleur critique qui correspond au  $\text{MDNBR} = 1.96$  est de l'ordre de  $1.7 \text{ MW/m}^2$ . La valeur maximale du flux de chaleur dans le sous-canal chaud est de  $0.9 \text{ MW/m}^2$ , soit environ deux fois plus faible que le flux de chaleur critique.

#### ► Effet de la température d'entrée du réfrigérant :

La figure (6.28) représente la variation du MDNBR et du flux de chaleur critique en fonction de la température d'entrée du réfrigérant. Nous avons fait varier la température d'entrée du réfrigérant de 25 °C jusqu'à la valeur maximale de 45 °C. Nous remarquons que le MDNBR et le flux de chaleur critique décroissent linéairement avec l'augmentation de la température d'entrée. A la température 25 °C, le MDNBR est de l'ordre de 2.42 ce qui correspond à un flux de chaleur critique d'environ  $2.2 \text{ MW/m}^2$ . La distribution du DNBR en fonction de la position axiale, pour différentes températures d'entrée du cœur du réacteur est représentée sur la figure (6.29). Le profil de la distribution du DNBR reste le même pour les différentes températures d'entrée de l'eau. La valeur maximale du DNBR est située au plan médian du cœur et diminue lorsque nous faisons incrémenter la température d'entrée du réfrigérant.

6. SIMULATION THERMOHYDRAULIQUE DU CŒUR DU RÉACTEUR TRIGA MARK II  
DU CENM

---

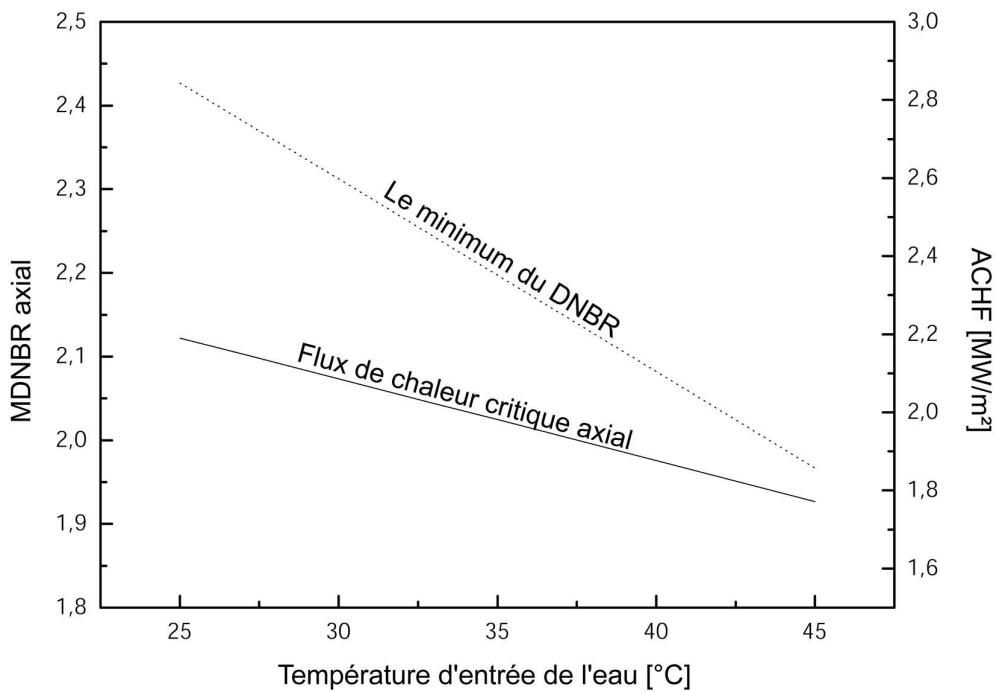


FIG. 6.28 – Variation du flux de chaleur critique et du MDNBR en fonction de la température d'entrée de l'eau du réacteur TRIGA MARK II

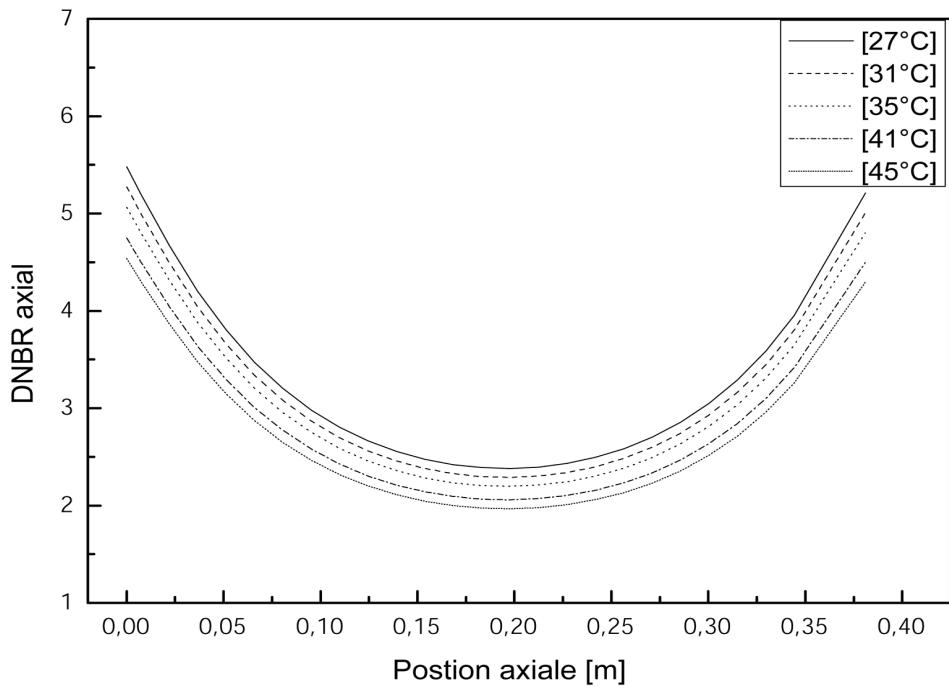


FIG. 6.29 – Variation du MDNBR en fonction de la position axiale dans le sous-canal chaud

► **Effet de la puissance opérationnelle du réacteur :**

Les figures (6.30) et (6.31) représentent respectivement la variation du MDNBR et du flux de chaleur critique correspondant en fonction de la puissance totale du réacteur et la variation du DNBR en fonction de la position axiale dans le sous-canal chaud du réacteur. Ces résultats sont obtenus à une température d'entrée de l'eau de 25 °C.

La valeur du MDNBR décroît au fur et à mesure que nous incrémentons la puissance du réacteur. Par exemple, à la puissance opérationnelle de 1MW, le MDNBR vaut 3.86 et il diminue de 140% lors du passage à la puissance de fonctionnement ordinaire du réacteur de 2MW. Le flux de chaleur critique axial décroît brutalement dans la gamme de puissance variant entre 250 kW et 500 kW. Au delà de 500 kW, le flux de chaleur critique diminue de 1.1% avec une incrémentation de 50% de la puissance totale du réacteur.

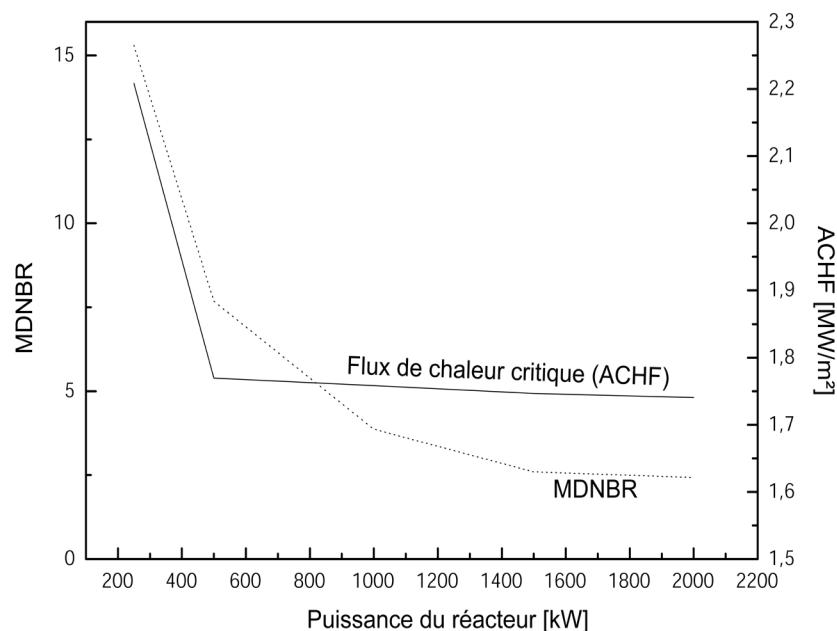


FIG. 6.30 – Variation du MDNBR en fonction de la puissance opérationnelle du cœur du réacteur TRIGA MARK II

► **Discussions sur les limites de sûreté :**

La puissance totale du réacteur, la température d'entrée du réfrigérant et la température maximale du combustible jouent un rôle capital dans la détermination des marges de sûreté des réacteurs nucléaires. Nous ajoutons à ces paramètres le point de DNBR minimal (MDNBR) dont la connaissance exacte, et pour toutes les conditions de fonctionnement du réacteur, permet de garantir l'intégrité de l'élément combustible.

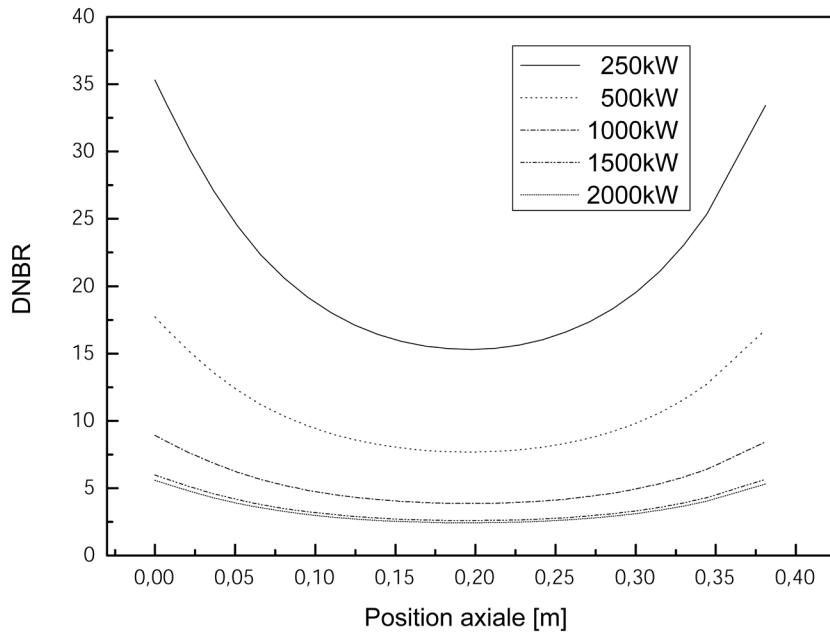


FIG. 6.31 – Variation du DNBR en fonction de la position axiale pour différentes puissances du réacteur TRIGA MARK II

Dans ce travail, nous n'avons pas calculé la température maximale du combustible, mais nous savons qu'elle est directement liée au flux de chaleur local et au flux de chaleur critique, et par conséquent, le point de DNBR. Nous avons montré précédemment que le DNBR pour le réacteur TRIGA MARK II varie en fonction de la puissance du réacteur et en fonction de la température d'entrée du réfrigérant. Donc, il est indispensable de savoir l'intervalle où le DNB peut varier sans qu'il dépasse la limite prévue ; soit la valeur théorique ou la valeur de conception donnée par le constructeur.

La figure (6.32) montre les marges typiques du DNB (Fenech, 1981). D'après cette figure, la condition de perte d'intégrité de la gaine du combustible est désignée par la limite d'endommagement « Damage Limit », qui correspond au  $\text{DNBR} < 1$ . La deuxième limite est désignée par la limite seuil « Threshold Limit » telle que le  $\text{DNBR}=1$ . Si cette limite est atteinte, ça ne veut pas dire qu'on aura une perte d'intégrité de la gaine. La différence entre la première limite et la deuxième est référencée par « Marge 1 ». Pour utiliser la limite « Threshold Limit », il faut avoir une autre marge en dessous, à partir de laquelle nous pouvons évaluer quantitativement le DNBR pour des conditions de fonctionnement à 100 % de la puissance nominale du réacteur. Cette marge est désignée par « Marge 2 » qui correspond à un  $\text{DNBR} = 1.3$ . Cette valeur est considérée comme étant la valeur de conception donnée par le constructeur, tel que le DNBR calculé en fonction des propriétés de l'écoulement dans les sous-canaux, ne doit pas être, en fonctionnement normal du réacteur

(100% de la puissance totale), inférieur à 1.3.

Ensuite, une autre marge désignée par « Marge 3 », qui correspond au  $DNBR = 1.6$  doit exister en vu de tenir compte des différents événements d'exploitation prévus (Anticipated Operating Occurrences « AOO ») ; par exemple, l'évaluation d'une telle décroissance du  $DNBR$  qui peut survenir en cas des transitoires. Au dessus du  $DNBR = 1.6$ , il n'est pas nécessaire d'évaluer l'état opérationnel du système avec le même degré de sophistication utilisé précédemment pour relier les corrélations donnant le  $DNBR$  avec les valeurs de base. Ainsi, comme il est indiqué sur la figure (6.32), d'autres marges du  $DNBR$  sont ajoutées et qui varient de 1.6 jusqu'à 2.3.

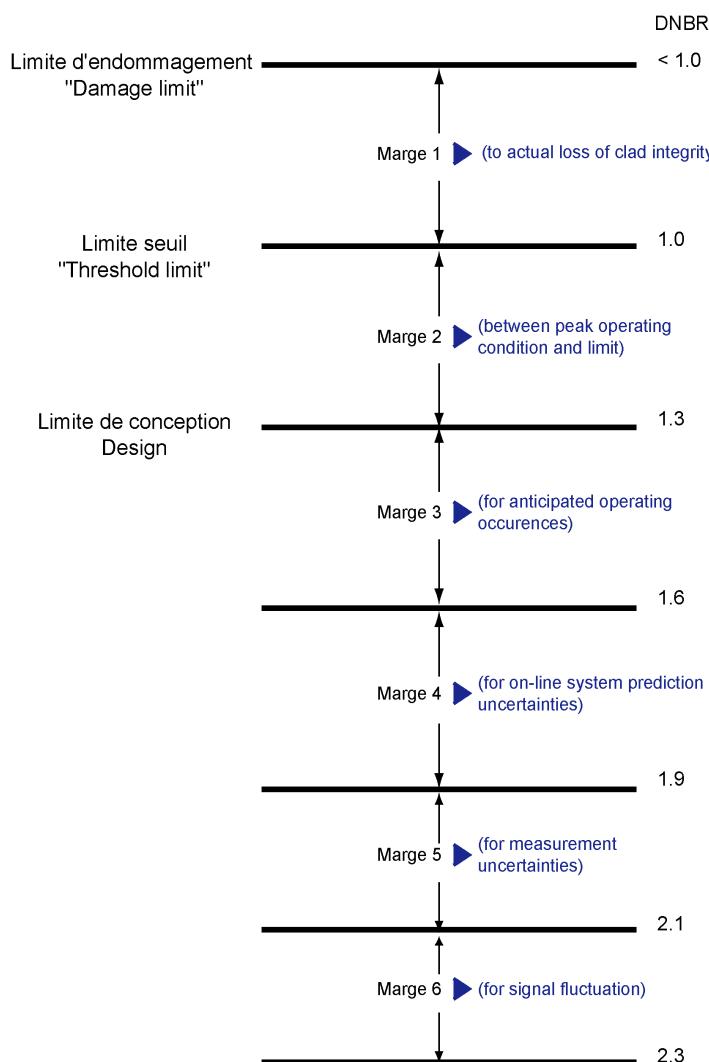


FIG. 6.32 – Marges typiques du DNB basés sur la corrélation des données DNB (d'après Fenech, 1981)

A la lumière des marges prédéfinies du minimum du DNB<sub>R</sub>, nous essayons de projeter les différentes valeurs du DNB<sub>R</sub> obtenues pour diverses conditions de fonctionnement du réacteur TRIGA MARK II. A la puissance nominale de 2MW, qui correspond à la puissance de fonctionnement normal du réacteur et pour une marge de température variant de 25 °C jusqu'à la valeur maximale de la température d'entrée (45 °C), le MDNB<sub>R</sub> varie de 2.4 jusqu'au 1.9. Ces valeurs sont supérieures à la valeur de conception minimale du DNB<sub>R</sub> (1.3).

Le tableau (6.3) résume quelques valeurs du MDNB<sub>R</sub> pour quelques réacteurs de types TRIGA. D'après ce tableau, il est clair que les valeurs que nous avons obtenues du MDNB<sub>R</sub> pour le réacteur TRIGA MARK II du CENM sont bien proches des valeurs du MDNB<sub>R</sub> présentées dans le tableau (6.3). En général, les réacteurs TRIGA, en fonctionnement normal, ont un MDNB<sub>R</sub> de l'ordre de 2. Donc, nous pouvons déduire que, au fonctionnement normal du réacteur TRIGA MARK II (puissance nominale de 2MW et une température d'entrée de 25°C), la marge de sûreté est très importante, tel que le pic du flux de chaleur local dans le sous-canal chaud du réacteur est presque 3 fois plus faible que le flux de chaleur critique qui peut entraîner une crise hydrodynamique au niveau de la gaine du combustible. Ceci prouve l'efficacité de la circulation naturelle du réfrigérant pour évacuer la chaleur générée par la fission dans le cœur du réacteur.

TAB. 6.3 – Valeurs du MDNB<sub>R</sub> pour quelques réacteurs de type TRIGA

Type du réacteur	Puissance (kW)	MDNB <sub>R</sub>
IPR-R1 TRIGA	250	8.5 avec le code PANTERA (Veloso, MAF, 2004)
McClellen TRIGA	2000	2.5 avec le code RELAP5 (JENSEN, 1998)
Bangladesh TRIGA	3000	2.8 avec le code PARET (Huda, 2004)
JRR-4 TRIGA	3500	2.41 avec le code Tiger et 2.55 avec le code COOLOD-N2 (Kaminaga, 1987)

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué le code SACATRI pour simuler le comportement thermohydraulique du cœur du réacteur TRIGA MARK II du CENM. Le but est de prévoir quelques paramètres thermohydrauliques clés pour la sûreté du réacteur.

Lors de la modélisation de ce réacteur, nous avons rencontré plusieurs difficultés dont les plus pertinentes sont les données géométriques exactes du réacteur. Pour surmonter ce problème, nous avons utilisé les données standards des réacteurs TRIGA ainsi que les données délivrées dans le rapport de sûreté du réacteur (GA, 1993 ; Htet, 2002 ; Chakir, 2005). En ce qui concerne la distribution de la densité de puissance dans le cœur du réacteur, nous l'avons calculée moyennant le code MCNP5, basé sur la méthode de Monte Carlo. Les résultats sont obtenus avec une déviation standard inférieure à 7 pcm pour le coefficient de multiplication effectif ( $K_{eff}$ ). L'erreur statistique relative concernant le taux de fission ne dépasse guère 1%. Ce calcul neutronique nous a permis de déterminer les différentes distributions du facteur de puissance axial et radial.

En fonctionnement normal du réacteur, à une puissance thermique de 2MW et pour une température d'entrée du réfrigérant de 25 °C, nous avons trouvé que la température moyenne de sortie est de l'ordre de 75 °C (sur les sous-canaux situés sur les rings A, B et C). Le MDNBR est de 2.42 avec un flux de chaleur critique trois fois plus grand que le flux de chaleur local. Ces résultats sont très rassurants puisque même à une température d'entrée de l'ordre de 45°C, la circulation naturelle de l'eau entre les éléments combustibles contribue efficacement à l'évacuation de la chaleur produite dans le cœur. Dans ces conditions, le MDNBR est égal à 1.9 avec un flux de chaleur local 2 fois plus faible que le flux de chaleur critique pouvant causer la rupture de la gaine du combustible et par conséquent, la perte de la première barrière de sûreté du réacteur.



# Conclusion générale

Le cœur d'un réacteur nucléaire est le siège d'une variété de phénomènes de transferts de masses et d'énergies. L'analyse détaillée de ces phénomènes est connue par la thermohydraulique ; science regroupant la mécanique des fluides et la thermique. La thermohydraulique joue un rôle capital dans les études de sûreté des réacteurs. La traduction en mathématique de ces divers phénomènes aboutit à des équations différentielles aux dérivées partielles où leurs résolutions nécessitent des compétences importantes et substantielles en techniques numériques et informatiques.

La présente synthèse représente le fruit d'un travail de thèse concernant la simulation numérique des écoulements appliquée à l'analyse thermohydraulique des réacteurs nucléaires de recherche de type TRIGA, notamment le réacteur TRIGA MARK II installé au Centre d'Etude Nucléaire de la Maâmora (CENM). Le but essentiel a consisté à développer un code thermohydraulique spécifique à ce type de réacteur appelé SACA-TRI (Sub-channel Analysis Code for Application to TRIga) permettant de prévoir la distribution des différents paramètres thermohydrauliques régissant le fonctionnement du réacteur.

Le refroidissement du cœur du réacteur s'effectue principalement par la circulation naturelle du fluide réfrigérant. Le modèle thermohydraulique que nous avons développé est basé sur les lois classiques de conservation d'énergie, de masse et de quantité de mouvement. Pour éviter les difficultés liées à la configuration géométrique du coeur du réacteur et pour satisfaire une simulation thermohydraulique détaillée, nous avons adopté l'approche par « sous-canaux ». Cette approche nous a permis de modéliser les effets tridimensionnels d'échange d'énergie, de masse et de quantité de mouvement.

Les différentes équations du modèle sont fortement non linéaires et couplées. La résolution numérique est effectuée à l'aide de la méthode des différences finies. Le couplage Pression-Vitesse est traité à l'aide de l'algorithme SIMPLE en utilisant un maillage décalé pour le champ de vitesse axiale et transversale.

La qualification du code établi est une étape vitale. Pour ce faire nous avons adopté une méthodologie basée sur deux procédures différentes qui doivent être exécutées séquentiellement :

- La première appelée « vérification », consiste à examiner la capacité du code établi, à travers la méthode numérique utilisée, à résoudre fidèlement les différentes équations du modèle en tenant compte des conditions aux limites. Le manque de benchmarks avec une solution exacte et non triviale spécifique à ce type de problème, nous a poussés à développer une démarche originale dans ce domaine. Cette démarche est une combinaison de la méthode de « solution fabriquée » et l’analyse de « l’ordre de précision » du schéma numérique utilisé. Ces tests rigoureux, ont permis de vérifier parfaitement la capacité de notre code à résoudre les équations du modèle. Pour un maillage assez vaste, le décalage entre la solution exacte et la solution obtenue par notre code ne dépasse pas 0.1%.
- La deuxième procédure consiste à valider le modèle physique utilisé. Particulièrement, elle consiste à vérifier si les différentes hypothèses simplificatrices introduites, ne conduisent pas à des dissimilarités avec la réalité physique. Cette procédure nécessite une expérimentation poussée permettant de mesurer les différents paramètres et variables essentiels du modèle. Pour ce faire, nous avons comparé les résultats de notre modèle avec des résultats expérimentaux issus des mesures effectuées sur le réacteur IPR-R1, de type TRIGA, installé et opéré au CDTN-Brésil. Une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux est obtenue. Les comparaisons entre les résultats de simulation et les mesures expérimentales ont montré que le code SACATRI, produit des résultats satisfaisants dont l’écart *calcul-experience* relatif maximal n’excède pas 6 %. Cependant, pour des puissances élevées, nous avons constaté que la fidélité de notre code à reproduire la réalité physique se dégrade légèrement. Cette dégradation a été remarquée particulièrement dans les canaux situés au centre du réacteur dont la puissance dissipée est la plus importante. Nous avons attribué cette dégradation à plusieurs circonstances notamment les approximations adoptées lors de la modélisation des échanges de masses latéraux (dûs à la turbulence et au gradient de pression) via l’équation de la quantité de mouvement, calculs des coefficients de pertes de charges locales ou bien même à la carte de puissance calculée par le code de calcul neutronique WIMS, sachant que le code MCNP pourrait donner des résultats plus précis.

L’application du code SACATRI à la simulation thermohydraulique du réacteur TRIGA MARK II du CENM nous a donné une vision prévisionnelle concernant l’intervalle de variation de quelques paramètres de sûreté vitaux, tels que le flux de chaleur critique et le

---

point de DNB minimal. Les résultats de notre simulation ont montré que, en fonctionnement normal du réacteur, le MDNBR est de l'ordre de 2.4 avec un flux de chaleur local trois fois plus faible que le flux de chaleur critique pouvant entraîner une crise hydrodynamique au niveau de la gaine du combustible. Ces résultats sont très rassurants puisque même à une température d'entrée de 45°C, la circulation naturelle de l'eau de refroidissement entre les éléments combustibles contribue efficacement à l'évacuation de la chaleur produite dans le cœur.



# Perspectives

Les résultats que nous avons obtenus jusqu'à maintenant restent satisfaisants et très encourageants dans le sens de pouvoir mener une analyse thermohydraulique poussée sur le réacteur TRIGA MARK II du Maroc. Mais, ceci nécessite l'amélioration du modèle physique du code SACATRI, vu quelques lacunes qui en restent, à savoir, les mécanismes d'échanges de masses et d'énergies, ainsi que quelques corrélations utilisées par le code et qui sont spécialement développées pour un écoulement en régime de convection forcée. Dans ce contexte, et dans le but d'élargir les capacités du code, nous envisageons de continuer ce travail par :

- La réalisation d'un couplage neutronique-thermohydraulique qui nous permettra de simuler les différents phénomènes transitoires se déroulant dans le cœur du réacteur.
- La modélisation des phénomènes de changement de phase et par conséquent, la détermination du taux de vide dans les sous-canaux du réacteur ainsi que du régime de transfert de chaleur mis en jeu dans le cas de l'ébullition en film ou en cas de dépassement des limites de sûreté.
- La modélisation des transferts thermiques dans les piles à combustibles qui nous permettra de relier le point de Burn-out à la température maximale du combustible.
- Confronter les résultats de simulation du code SACATRI avec les résultats expérimentaux qui peuvent être effectués sur le réacteur TRIGA MARK II du CENM. Cette procédure permettra une validation grossière du code SACATRI.
- Le réacteur TRIGA MARK II est conçu pour être étendu à fonctionner à une puissance de 3MW, avec un changement du mode de refroidissement du réacteur de la convection naturelle vers la convection forcée ou mixte. Ce qui nous mène à élargir les capacités du code SACATRI à tenir compte de cette variation de puissance.

Par ailleurs, une étude de dimensionnement et réalisation d'une maquette à échelle réduite du réacteur reste à effectuer. Une instrumentation poussée permettra une validation très fine du code.



# Bibliographie

## A

AIAA. 1998. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations. American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-G-077-1998.

Allaire, G. 1995. Solving linear systems in FLICA-4, a thermohydraulic code for 3-D transient computations. In : Proceedings of the International Conference on Mathematics and Computations, Reactor Physics, and Environmental Analysis, American Nuclear Society (ANS), Portland Oregon.

Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H., 1984. Computational fluid mechanics and heat transfer. Hemisphere, New York.

## B

Babuska, I., and Oden, J.T. 2004. Verification and validation in computational engineering and science : basic concepts. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193 : 4057-4066.

Behar, M., 1993. Transfert de chaleur lors de changements de phase. In : Sacadura, J.F. ed., Initiation aux transferts Thermiques. Tech. & Doc, Paris, pp. 315-334.

Bernath, L., 1960. A theory of local boiling burnout and its application to existing data. Chemical Engineering Progress Symposium, pp. 95-116.

Bogoslovskaya, G.P., Zhukov, A.V., and Sorokin, A.P. 2000. Models and characteristics of interchannel exchange in pin bundles cooled by liquid metal.

Botella, O., and Peyret, R. 2001. Computing singular solutions of the Navier-Stokes equations with the Chebyshev-Collocation Method. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 36 : 125-163.

Both, J.P., Mazzolo, A., Petit, O., Peneliao, Y., and Roesslinger, B. 2003. User Manual for version 4.3 of the TRIPOLI-4 Monte Carlo method particle transport computer code, CEA-Report : CEA-R-6044, DTI, CEA/Saclay, France.

Buksha, Y.K., Marinenko, A.A., and Touzov, A.A. 2000. Codes for 3-dimensional thermo-hydraulic calculation of fast reactor core in steady state, transient and accident conditions.

Burwell, M.J., Lerchl, G., Miro, J., Teschendorff, V., and Wolfert, K. 1989. The Thermal-hydraulic Code ATHLET for Analysis of PWR and BWR Systems. In : Proceedings of the Fourth International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal-hydraulics (NURETH-4), Karlsruhe, Federal Republic of Germany, pp. 1234-1239.

## C

CFX-4. 1997. User Manual. AEA Technology, <http://www.software.aeat.com/cfx.default.asp>

Charnay, G., and Schon, J.P., 1993. Transfert de chaleur par convection. In : Sacadura, J.F. ed., Initiation aux transferts Thermiques. Tech.& Doc, Paris, pp. 185-269.

Chelemer, H., Weisman, J., and Tong, L.S. 1972. Subchannel thermal analysis of rod bundle cores. Nuclear Engineering and Design, 21 : 35-45.

Cheng, S.K., and Toderas, N.E. 1985. Hydrodynamic models and correlations for wire-wrapped LMFBR bundles and subchannel friction factors and mixing parameters. Nuclear Engineering and Design, 92 : 227.

Cheng, X., Schulenberg, T., Bittermann, D., and Rau, P. 2003. Design analysis of core assemblies for supercritical pressure conditions. Nuclear Engineering and Design, 223 : 279-294.

Chiu, C., Toderas, N., and Morris, R. 1980. Experimental techniques for liquid metal cooled fast breeder reactor fuel assembly thermal/hydraulic tests. Nuclear Engineering and Design, 62 : 253-270.

Christensen, M.J., and Thayer, T.H. 2001. The Project Manager's Guide to Software Engineering's Best Practices. IEEE Computer Society, Los Alamos, CA.

Churchill, S.W., and Chu, H.H.S. 1975. Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate. International Journal of Heat and Mass Transfer,

---

18 : 1323.

Colburn, A.P. 1933. A method of correlating forced convection heat transfer data and a comparison with liquid frictions. Trans. AIChE, 29 : 170.

Chakir El Mahjoub, 2005. Thèse de doctorat : Analyse des benchmarks expérimentaux sur le coefficient de température des réseaux des réacteurs à eau par la méthode de Monte-Carlo et implication sur les données nucléaire de base. Faculté des Sciences de Rabat, Maroc.

## D

Dalle, H.M. 2003. Avaliação neutrônica do reator TRIGA IPR-R1 - Configuração com 63elementos combustíveis e barra de regulação em F16. NI-EC3-01/03, CDTN/CNEN, Belo Horizonte, MG.

Dittus, F.W., and Boelter, L.M.K. 1930. University of California, Berkeley, Publ. Eng., 2 : 443.

DOE. 1992. DOE Fundamentals Handbook, Thermodynamics, Heat Transfer, and Fluid Flow. DOE-HDBK-1012/2-92, U.S Department of Energy, Washington, D.C.20585.

Domanus, H.M., and Sha, W.T. 1978. Numerical Results for a Hexagonal Fuel Assembly with a Planar Blockage using the C0MMIX-1A Computer Code, NUREG/CR-0483, ANL-CT-79-8.

## E

Eckert, E.R.G., and Drake, R.M., Jr., 1987. Analysis of Heat and Mass Transfer Hemisphere Publishing Corp., Washington, D.C.

El-Wakil, M.M., 1971. Nuclear heat transport. International textbook company.

Erradi, L., and Essadki, H. 2001. Analysis of safety limits of the Moroccan TRIGA MARK II research reactor. Radiation Physics and Chemistry, 61 : 777-779.

Eymard, C., 2004. CATHARE V2.5, SSTH/LDAS/EM/2004-04. CEA, Grenoble, France.

---

## F

Feltus, M.A., and Miller, W.S. 2000. Three-dimensional coupled kinetics/thermal- hydraulic benchmark TRIGA experiments. Annals of Nuclear Energy, 27 : 771-790.

Fenech, H. ed., 1981. Heat transfer and fluid flow in nuclear systems. Pergamon Press.

FLUENT, 2005. FLUENT, version 6.2.16, 2005. FLUENT Inc., 10 Cavendish Court. pp. Centerra Resource Park, Lebanon, NH 03766.

## G

GA. 1993. Safety Analysis Report for the Moroccan 2MW TRIGA MARK II Reactor.

Groeneveld, D.C., et al., A. 2007. The 2006 CHF look-up table. Nuclear Engineering and Design, 237 1909-1922.

Gunter, A.Y., and Shaw, W.A. 1945. A general correlation of friction factors for various types of surfaces in crossflow. Trans. ASME, 67 : 643.

## H

Handbook of Hydraulic Resistance, 2001. Begell House Publishers, 3rd edition : 790.

Han, K., Seo, K., Hwang, D., and Chang, S.H. 2006. Development of a thermal hydraulic analysis code for gas-cooled reactors with annular fuels. Nuclear Engineering and Design, 236 : 164-178.

Hanna, B.N. 1998. CATHENA : A thermalhydraulic code for CANDU analysis. Nuclear Engineering and Design, 180 : 113-131.

Hirao, S., and Nakao, N. 1974. DIANA-A fast and high capacity computer code for inter-channel coolant mixing in rod arrays. Nuclear Engineering and Design, 30 : 214-222.

Huda, M.Q., and Bhuiyan, S.I. 2004. Thermo-hydrodynamic design and safety parameter studies of the TRIGA MARK II research reactor. Annals of Nuclear Energy, 31 : 1101-1118.

---

Huda, M.Q., and Bhuiyan, S.I. 2006. Investigation of thermohydraulic parameters during natural convection cooling of TRIGA reactor. Annals of Nuclear Energy, 33 : 1079-1086.

Htet, A., 2002. Thèse de doctorat : Constitution et qualification de nouvelles bibliothèques de sections efficaces multigroupes pour les calculs neutroniques. Application à la mise à jour de la bibliothèque du code de transport WIMSD. Faculté des Sciences de Rabat, Maroc.

## I

IAEA-TECDOC-1157 : LMFR core Thermohydraulics : Status and prospects, 1157 : 190-205.

IAEA. 2005. Natural circulation in water cooled nuclear power plants : Phenomena, models, and methodology for system reliability assessments, IAEA, Vienna.

Idelchik, I.E., 1996. Flow Resistance : A Design Guide for Engineers. CRC.

## J

Jensen, R.T., and Newel, D.L., 1998. Thermal Hydraulic calculations to support to support increase in operating power in McClellen Nuclear Radiation Center TRIGA reactor. International user's seminar, College Station, Texas.

Jiang, Y., Songtao, W., and Baoshan, J. 2007. Development of sub-channel analysis code for CANDU-SCWR. Progress in Nuclear Energy, 49 : 334-350.

## K

Kaminaga, M. 1990. COOLOD-N : A computer Code, for the Analyses of Steady-State Thermal-Hydraulics in Plate-Type Research Reactors, JAERI-M 90-021.

Kaminaga, M. 1994. COOLOD-N2 : A Computer Code, for the Analyses of Steady-State Thermal-Hydraulics in Research Reactors, JAERI-M 94-052.

---

Kaminaga, M., Ikawa, H., Watanabe, S., Ando, H., and Sudo, Y. 1987. Thermohydraulic Characteristics Analysis of Natural Convective Cooling Mode on the Steady State Condition of Upgraded JRR-3 Core, Using COOLOD-N Code, JAERI-M 87-055.

KELLY, J.M., and Kazimi, M.S. 1980. Development of the Two-Fluid Multi-Dimensional Code THEPRIT for LWR Analysis. In : Proceedings of the 19th National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida.

Knupp, P., and Salari, K., 2002. Verification of Computer Codes in Computational Science and Engineering. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

## L

Landau, L., and Lifchitz, E., 1989. Physique Théorique, 6. Mécanique des fluides. Le Fevre, E.J., 1957. In : Proceedings of the International Congress for Applied Mechanics. 4, p. 168.

Lienhard IV, J.H., and Lienhard V, J.H., 2005. A heat transfer textbook. Phlogiston Press, Cambridge, Massachusetts, U.S.A.

Ligou, J., 1997. Introduction au génie nucléaire Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

## M

Macdougall, J.D., and Lillington, J.N. 1984. The SABRE code for fuel rod cluster thermo-hydraulics. Nuclear Engineering and Design, 82 : 171-190.

Marcum, W.R., 2008. Thermal Hydraulic Analysis of the Oregon State TRIGA® Reactor Using RELAP5-3D. Department of Nuclear Engineering and Radiation Health Physics. Oregon State University, p. 151.

Markoczy, G. 1972. Convective heat transfer in rod clusters with turbulent axial coolant flow. Part 1. Mean values over the rod perimeter. Waerme Stoffuebertrag, 5 : 204-212.

Martynenko, O.G., and Khramtsov, P.P., 2005. Free-Convective Heat Transfer. Springer, Verlag Berlin Heidelberg.

- McAdams, W.H., 1954. Heat Transmission. 3 ed. McGraw-Hill, New York.
- McAdams, W.H., et al. 1949. Heat transfer at high rates to water with surface boiling. Industrial & Engineering Chemistry, 41 : 1945-1953.
- MCNP, 2003. A General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version 5. Los Alamos National Laboratory.
- Mele, I., 1993. TRISTAN : A computer Program for Calculating Natural Convection Flow Parameters in TRIGA cores. Regional Meeting : Nuclear Energy in Central Europe Presents and Perspectives, Portoroz, Slovenia.
- Mele, I., and Zefran, B. 1992. TRISTAN : A computer Program for Calculating Natural Convection Flow Parameters in TRIGA Core, University of Ljubljana, Slovenia.
- Merroun, O., Almers, A., and El Bardouni, T. 2007. Thermalhydraulic modeling and analysis of the hot channel of the Moroccan TRIGA MARK II research reactor. In : Proc. First International Conference on Physics and Technology of Reactors and Applications, Marrakech, Morocco, p. 39.
- Merroun, O., Almers, A., and El Bardouni, T. 2008. Manufactured solution for verification of the 3D Thermalhydraulic SACATRI code. In : Proc. CHT-08 on Advances in Computational Heat Transfer, Begell House, New York, ISBN 978-1-56700-252-2.
- Merroun, O., Al Mers, A., El Bardouni, T. ,El Bakkari, B., Chakir, E. 2009. Analytical benchmarks for verification of thermal-hydraulic codes based on sub-channel approach. Nuclear Engineering and Design. 239 (4), pp 735-748.
- Merroun, O., Al Mers, A., Veloso, M. A., El Bardouni, T., El Bakkari, B., Chakir, E. 2009. Experimental validation of the thermal-hydraulic code SACATRI. Nuclear Engineering and Design. doi : 10.1016/j.nucengdes.2009.08.005.
- Mesquita, A.Z., 2005. Doctoral Thesis : Investigação experimental da distribuição de temperaturas no reator nuclear de pesquisa TRIGA IPR-R1. Faculty of Chemical Engineering, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Moody, L.F. 1944. Friction factors for pipe flow. Trans. ASME, 66 : 671.
- Moukalled, F., and Darwich, M. 2000. A unified formulation of the segregated class of algorithm for fluid flow at all speeds. Numerical heat transfer B, 37 : 103-139.

## O

Obenchain, C.F. 1969. PARET-A Program for the Analysis of Reactor Transients, IDO-17282.

Oberkampf, W.L., and Barone, M.F., 2004. Measures of Agreement Between Computation and Experiment : Validation Metrics. 34th AIAA Fluid Dynamics Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Portland, OR, AIAA Paper, pp. 2004-2626.

Oberkampf, W.L., and Trucano, T.G. 2002. Verification and validation in computational fluid dynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 38 : 209-272.

Oberkampf, W.L., and Trucano, T.G. 2008. Verification and validation benchmarks. *Nuclear Engineering and Design*, 238 : 716-743.

Ostrach, S. 1953. An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force, NACA Report 1111, pp. 17, Supersedes NACA Technical Note 2635.

## P

Padet, J., 1997. Principes des transferts convectifs. POLYTECHNICA, Paris.

Patankar, S.V., 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, Washington, DC.

Patankar, S.V., and Spalding, D.B. 1972. A calculation procedure for heat, mass, and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International journal of heat and mass transfer*, 15 : 1787-1806.

Pletcher, R.H., Minkowycz, W.J., Sparrow, E.M., and Schneider, G.E., 1988. Overview of basic numerical methods. In : Minkowycz, W.J., Sparrow, E.M., Schneider, G.E., and Pletcher, R.H. eds., *Handbook of numerical heat transfer*. Wiley-Interscience.

## Q

Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F., 2000. Méthodes numériques pour le calcul scientifique : programmes en MATLAB. Springer.

---

# R

Ravnik, M. 1990. Nuclear safety parameters of mixed TRIGA cores, In : Proceedings of the Workshop on Reactor Physics Calculations for Applications in Nuclear Technology, Trieste, February 12-March 13, 1990, pp. 398-421.

Rehme, K. 1971. Laminarstromung in Stabbundden. Chem. Ingenieur Technik, 43 : 17.

Rehme, K. 1973. Simple method of predicting friction factors of turbulent flow in non-circular channels. International Journal of Heat and Mass Transfer, 16 : 933.

Rehme, K. 1992. The structure of turbulence in rod bundles and the implications on natural mixing between the subchannels. International Journal of Heat and Mass Transfer, 35 567-581.

Reuss, P., 2003. Précis de neutronique. COLLECTION Génie Atomique, EDP SCIENCES, France.

Roache, P.J. 1998. Verification and Validation in Computational Science and Engineering. Hermosa Publishers, Albuquerque, NM.

Roache, P.J. 2002. Code verification by the method of manufactured solutions. Journal of Fluids Engineering, 124 4-10.

Rowe, D.S. 1971. COBRA-III : A digital Computer Program for Steady State and Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Rod Bundle Nuclear Elements, In : BNWL-B-82, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

Rowe, D.S. 1973. COBRA IIIC : a digital computer code for steady state and transient thermal-hydraulic analysis of rod bundle nuclear fuel elements, In : BNWL-1695, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

Rowe, D.S., and Angle, C.W. 1967. Crossflow Mixing Between Parallel Flow Channels During Boiling : Part I, COBRA-Computer Program for Coolant Boiling in Rod Arrays, In : BNWL-371, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

Rowe, D.S., and Angle, C.W. 1967. Crossflow mixing between parallel flow channels during boiling. Part III. Effect of spacers on mixing between two channels, In : BNWL-371 PT2, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

Rowe, D.S., and Angle, C.W. 1969. Crossflow mixing between parallel flow channels during boiling. Part III. Effect of spacers on mixing between two channels, In : BNWL-371 PT3, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

Roy, C.J. 2005. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *Journal of Computational Physics* 205 : 131-156.

## S

Saunders, O.A. 1939. Natural Convection in Liquids. In : Proceedings of the Royal Society. London A, pp. 55-71.

Schmidt, E., and Beckmann, W. 1930. Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld vor einer Wärme abgebenden senkrechter Platte bei natürlicher Konvektion. 1 : 391.

Schuh, H., 1948. Boundary layers of temperature. In : Tollmein, W. ed., Boundary Layers. German Doc. Cent. Ref. 3220T, British Ministry of Supply.

Seider, E.N., and Tate, G.E. 1936. Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes. *Industrial & Engineering Chemistry*, 28 : 1429.

Sha, W.T. 1980. An overview on rod-bundle thermal-hydraulic analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 62 : 1-24.

Sha, W.T., Domanus, H.M., Schmitt, R.C., Oras, J.J., and Lin, E.I.H. 1978. COMMIX-1 : A Three-Dimensional, Transient, Single-Phase Component Computer Program for Thermal-Hydraulic Analysis, NUREG/CR-9785, ANL-77-96.

Shyy, W., Garbey, M., Appukuttan, A., and Wu, J. 2002. Evaluation of Richardson extrapolation in computational fluid dynamics. *Numerical Heat Transfer. Part B*, 41 : 139-164.

Slin, N., and Juanico, L. 2006. Experimental study on the Reynolds number dependence of turbulent mixing in a rod bundle. *Nuclear Engineering and Design*, 236 : 1860-1866.

Smith, R.S. 1992. Comparison of NCTRIGA Results to GA Data, NCTRIGA Input Format and Revision of NACTON, Intra-Laboratory Memo, Argon National Laboratory.

Snoj, L., and Ravnik, M. 2008. Power peakings in mixed TRIGA cores. *Nuclear Engineering and Design*, 238 : 2473-2479.

---

Sparrow, E.M., and Gregg, J.I. 1959. A boundary layer treatment of laminar film condensation. *Journal of Heat Transfer*, 81 : 13-18.

Sparrow, E.M., and Loffler, A.L., Jr. 1959. Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular array. *A.I.Ch.E.J.*, 5 : 325.

Stewart, C.W. 1977. COBRA-IV : The Model and Method, In : BNWL-2214, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

Sudo, Y., Ikawa, H., and Kaminaga, M. 1985. Development of Heat Transfer Package for Core Thermalhydraulic Design and Analysis of Upgraded JRR-3. In : Proceedings of the International Meeting of Reduced Enrichment for Research and Test Reactors, Netherlands.

## T

Thomas, L.H. 1945. Elliptic problems in linear difference equations over a network. Watson Sc. Comput. Lab. Rept., Columbia University, New York.

Toderas, N.E., and Kazimi, M.S., 1990. Nuclear System I, Thermal Hydraulic Fundamentals.

Toderas, N.E., and Kazimi, M.S., 2001. Nuclear System II, Elements of Thermal Hydraulic Design.

Tong, L.S., and Tang, Y.S., 1997. Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flow. CRC, first edition.

Toumi, I., Bergeron, A., Gallo, D., Royer, E., and Caruge, D. 2000. FLICA-4 : a three dimensional two-phase flow computer code with advanced numerical methods for nuclear applications. *Nuclear Engineering and Design*, 200 : 139-155.

## V

---

Van Dormaal, J.P., and Raithby, G.D. 1984. Enhancements of the SIMPLE method for incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7 : 147-163.

Vassallo, P., and Symolon, P. 2007. Friction Factor Measurements in an Equally Spaced Triangular Tube Array. Lockheed Martin Corporation Schenectady, New York, 12301, USA.

Veloso, M.A. 1985. PANTERA-1P : Programa para Análise Termo-hidráulica do Núcleo de Reatores a Água. Nota Técnica DETR-PD-201/85. Belo Horizonte, MG : NUCLE-BRÁS/CDTN, Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear.

Veloso, M.A. 2005. Avaliação termo-hidráulica do reator Triga IPR-R1 a 250 kW. Technical Report NI-EC-05/05, Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, Belo Horizonte, MG, Brazil.

Veloso, M.A., Mattos, J.R.d., and Dalle, H.M. 2006. Subchannel Formulation Applied to TRIGA Core Thermal-Hydraulic Analysis. 3rd World TRIGA Users Conference, Minascentro-Belo Horizonte, Minas Gerais, Brazil.

Veloso, M.A.F., 2004. Doctoral Thesis : ANÁLISE TERMOFLUIDODINÂMICA DE REATORES NUCLEARES DE PESQUISA EFRIGERADOS A ÁGUA EM EGIME DE CONVEÇÃO NATURAL. Tese submetida à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Estadual de Campinas, Brazil.

## W

Waata, C.L., 2006. Coupled Neutronics/Thermal-hydraulics Analysis of High-Performance Light-Water Reactor Fuel Assembly. FZKA 7233, Germany.

Watanabe, S. 1984. COOLOD : Thermal and Hydraulic Analysis Code for Research Reactors with Plate Type Fuel Elements, JAERI-M 84-162.

Wheeler, C.L., Stewart, C.W., Cena, R.J., Rowe, D.S., and Sutey, A.M. 1976. COBRA-IV-I An Interim Version of COBRA for Bundle Nuclear Fuel Element and Cores, In : BNWL-1962, UC-32, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, WA.

## X

X-5 Monte Carlo Team, 2003. MCNP- A General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version 5-Los Alamos National Laboratory. April 24, 2003.

---

**Z**

Zukauskas, A. 1972. Heat transfer from tubes in crossflow. *Adv. Heat Transfer*, 8 : 93.

---



## Annexe A

# Résolution numérique des équations algébriques discrétisées

La discréétisation des équations thermohydrauliques du problème aboutit à un système d'équations algébriques de la forme :

$$\sum_{j=1}^N (a_{i,j}^\Phi \Phi_{i,j}) = Su_{i,j}, i = 1, 2, \dots N \quad (\text{A.1})$$

où les  $\Phi_{i,j}$  sont les inconnus du problème, les  $a_{i,j}^\Phi$  sont les coefficients du système et les  $Su_{i,j}$  les composantes du terme source. Sous la forme matricielle, ce système d'équations est donné par :

$$[\mathbf{M}] \Phi = Su \quad (\text{A.2})$$

Afin de trouver les inconnus du problème ( $\Phi$ ), il faut résoudre ce système d'équations. Plusieurs méthodes numériques peuvent être utilisées pour résoudre ce système d'équations. Parmi ces méthodes nous trouvons les méthodes directes et les méthodes indirectes ou bien itératives.

### Méthodes directes

Plusieurs exemples de méthodes directes peuvent être utilisées, comme l'élimination de Gauss est les formules de Cramer dont le vecteur inconnu  $\Phi$  est donné par :

$$\Phi_j = \frac{\Delta_j}{\det(M)}, j = 1, 2, \dots N \quad (\text{A.3})$$

où  $\Delta_j$  est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la  $j$ -ième colonne de  $M$  par  $S_u$ .

Ces méthodes sont dites directes parce qu'elles fournissent la solution du système en un nombre fini d'étapes. Malheureusement, cette formule est d'une utilité pratique limitée. Le nombre d'opérations à effectuer pour la solution du système de  $N$  inconnus peut être déterminé à l'avance et il est de l'ordre de  $N^3$ . Le stockage des  $N^2$  coefficients du système d'équations est nécessaire. Cependant, le coût de calcul des formules de Cramer est de l'ordre de  $(N+1)!$  flops (Quarteroni, 2000) ce qui est inacceptable même pour des matrices  $M$  de petites dimensions. C'est pour cette raison que des méthodes directes, alternatives aux formules de Cramer, ont été développées. Thomas (1949) a développé une méthode numérique rapide et puissante capable de résoudre des systèmes tri-diagonaux et penta-diagonaux qui correspondent respectivement aux équations contenant trois et quatre inconnus. Cette méthode est connue par TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) qui est une méthode simplifiée de la méthode de l'élimination Gaussienne. Avec TDMA, la solution est obtenue en  $N$  opérations au lieu de  $N^3$  exigée par l'élimination Gaussienne.

Dans notre problème, les coefficients des équations thermohydrauliques discrétisées du modèle thermohydraulique constituent une matrice tri-diagonale de la forme :

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & & & 0 \\ b_1 & d_2 & a_2 & & \\ & b_2 & d_3 & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & b_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

La méthode TDMA est implémentée selon l'algorithme suivant (Pletcher, 1988) :

A partir de l'élimination en avant nous calculons les nouveaux coefficients  $d_j$  et  $c_j$  :

$$d_j = d_j - \frac{b_j}{d_{j-1}} a_{j-1}, j = 2, 3, \dots, n \quad (\text{A.5})$$

$$c_j = c_j - \frac{b_j}{d_{j-1}} c_{j-1}, j = 2, 3, \dots, n \quad (\text{A.6})$$

Les inconnus sont donc calculés à partir d'une substitution en arrière tel que :

$$x_n = c_n/d_n \quad (\text{A.7})$$

$$x_k = \frac{c_k - a_k x_{k+1}}{d_k}, k = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (\text{A.8})$$

La méthode TDMA est largement utilisée dans les problèmes CFD, puisqu'elle est peu coûteuse en terme du temps de calcul et ne nécessite qu'un minimum d'espace de stockage. En effet, elle est appliquée généralement pour des problèmes unidimensionnelles, mais elle peut être utilisée dans un processus itératif, d'une façon dite « ligne par ligne », pour la simulation des cas multidimensionnelles. Des subroutines correspondantes à la procédure TDMA peuvent être trouvées dans différentes ressources y inclut la référence (Anderson, 1984).

## Méthodes indirectes

Théoriquement, en utilisant des méthodes itératives, on obtient la solution  $\Phi$  d'un système linéaire après un nombre infini d'itération. À chaque pas, elles nécessitent le calcul du résidu du système. Elles sont d'une grande utilité dans le cas où la matrice  $M$  est creuse et de grande dimension. Le principal avantage des méthodes c'est qu'elles ne nécessitent le stockage que des éléments non nuls de la matrice  $M$ .

La méthode itérative de *Gauss-Seidel* est une procédure simple et communément utilisée pour résoudre itérativement le système d'équation (A.2). C'est une version améliorée de la méthode de Jacobi.

Pour résoudre le système (A.2), il est préférable de se ramener à un problème de point fixe. Pour se faire, on considère une décomposition de type  $M = A - N$  et on définit l'itération  $k$  telle que :

$$A\Phi_{k+1} = N\Phi_k + Su, M = A - N \quad (\text{A.9})$$

Le choix de la décomposition  $M = A - N$  est important pour la performance de la méthode. D'une part, la matrice  $A$  doit être choisie telle que le système (A.9) soit facile

à résoudre que le système (A.2). D'autre part, les valeurs propres de la matrice  $A^{-1}N$  doivent satisfaire  $|\lambda_i| < 1$  pour que l'itération (A.9) converge.

Si l'on dénote :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & a_{n-1,n} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

et  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  (afin que  $M = L + D + U$ ), les itérations les plus connes sont

- *Jacobi* :  $A = D$ ,  $N = -L - U$ ;
- *Gauss-Seidel* :  $A = D + L$ ,  $N = -U$ .

Pour ces deux méthodes, la matrice  $A$  est choisie de manière à ce que le système (A.9) soit facile à résoudre.

Le processus itératif de *Gauss-Seidel* est défini par :

Pour  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Phi_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \Phi_j^{(k)} \right) \quad (\text{A.10})$$

Une condition suffit pour que le processus itératif de *Gauss-Seidel* converge est :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.11})$$

En pratique, le processus itératif de *Gauss-Seidel* doit être interrompu à la première itération  $k$  pour laquelle on a :

$$\|\Phi^{(k)} - \Phi\| < \varepsilon \quad (\text{A.12})$$

ou  $\varepsilon$  est une tolérance fixée et  $\|\cdot\|$  est une norme vectorielle donnée.

Le taux de convergence du processus itératif de *Gauss-Seidel* peut être amélioré considérablement en appliquant des procédures dites d'accélération. La plus simple de ces procédures est la méthode **SOR** « Successive Over-Relaxation ». La principale idée de la méthode **SOR** consiste à observer la variation ou le changement des inconnus du système entre deux itérations successives. Le but c'est de prévoir le taux de variation des inconnus qui pourra résulter pendant la prochaine itération. Ensuite, les variables sont arbitrairement ajustées dans le sens de la variation prévue pendant la prochaine itération. Puisque la procédure itérative probablement converge vers la solution exacte, la variation prévue pour la prochaine itération, doit constituée juste une fraction du changement observé pendant la dernière itération.

En pratique, la méthode **SOR** peut être implémentée en modifiant l'algorithme de l'équation (A-9) :

$$\hat{\Phi}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \Phi_j^{(k)} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\Phi_i^{(k+1)} = \Phi_i^{(k)} + \varpi \left( \hat{\Phi}_i^{(k+1)} - \Phi_i^{(k)} \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.14})$$

avec  $\hat{\Phi}_i^{(k+1)}$  est la valeur provisoire de l'inconnu déterminée à partir de l'algorithme *Gauss-Seidel*, et  $\varpi$  est le paramètre dit « overrelaxation parameter ».

En combinant les deux équations (A-13) et (A-14), nous obtenons la forme générale suivante :

$$\Phi_i^{(k+1)} = (1 - \varpi) \Phi_i^{(k)} + \frac{\varpi}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \Phi_j^{(k)} \right) \quad (\text{A.15})$$

La méthode **SOR** est consistante pour tout  $\varpi \neq 0$  et elle coïncide avec la méthode de *Gauss-Seidel* pour  $\varpi \neq 1$ . Si  $0 < \varpi < 1$  la méthode est appelée méthode de sous-relaxation, et méthode de sur-relaxation si  $\varpi > 1$ .